

高等职业教育技能型紧缺人才培养培训工程系列教材

高等数学习题集

北京大学公共经济管理研究中心职业教育研究所 组编

傅延欣 韩 伟 王 德 主编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是《高等数学》(上、下册)教材的配套习题,涉及函数、极限与连续、导数与微分、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、常微分方程、级数、行列式矩阵与线性方程组、概率统计初步等内容。每章习题有两个部分,习题 A 和习题 B,部分章还有习题 C,每一部分的题型有:填空题,选择题,计算题,证明题,应用题,书后提供了全部习题的参考答案。

本书可作为高职高专基础课程教材的习题集,也可作为其他人员学习高等数学的参考书。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题集 / 傅延欣, 韩伟, 王德主编; 北京大学公共经济管理研究中心职业教育研究所组编.

—北京: 电子工业出版社, 2009.9

(高等职业教育技能型紧缺人才培养培训工程系列教材)

ISBN 978-7-121-09564-1

I. 高… II. ①傅…②韩…③王…④北… III. 高等数学—高等学校: 技术学校—习题 IV.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 170319 号

责任编辑: 刘文杰

印 刷:

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 9.75 字数: 249 千字

印 次: 2009 年 9 月第 1 次印刷

印 数: 9 200 册 定价: 18.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010) 88258888。

前 言

高等职业教育是高等教育的一个重要组成部分，而数学是高等职业教育的一门必修公共课。为了满足高职不同专业、不同类别学生的学习需要，我们以培养高素质应用型人才为目标，遵循“夯实基础，突出实用”的原则，组织了学术水平较高，教学实践经验丰富的第一线数学教师，在完成了《高等数学》教材的编写任务后又编写了《高等数学习题集》。

本书共 10 章，第 1 章为函数，第 2 章为极限与连续，第 3 章为导数与微分，第 4 章为不定积分，第 5 章为定积分及其应用，第 6 章为多元函数微积分，第 7 章为常微分方程，第 8 章为级数，第 9 章为行列式矩阵与线性方程组，第 10 章为概率统计初步。每章的习题有两部分，习题 A 和习题 B，部分还有习题 C，每部分的题型有：填空题、选择题、计算题、证明题和应用题。

本书具有以下特点：

（1）体例科学。各章的内容既体现教学大纲的要求，又突出重点，内容分配合理，科学地规范了高职高专学生学习特点的体系结构。

（2）内容全面。注重吸收新知识、新成果，使学生在掌握基础知识的层面上，再提高一个层次，达到举一反三的效果。

（3）结构优化。本书按照大纲教学要求划分章节，保证了内容的基本区分度，力求做到有层次、有梯度、由浅入深、由低到高、相互补充、有机统一。

（4）选题精当。内容选择和编写紧扣教学大纲，适合高职高专学生学习的特点，注重从知识立意向能力立意转变，注重基础知识、综合能力、实验能力的训练，以提高学生综合运用知识的应试能力。

本书由北京大学公共经济管理研究中心职业教育研究所组编，傅延欣、韩伟、王德担任主编。本书在编写过程中，得到青岛恒星学院有关领导的热情关心和指导，青岛大学林艺教授、航空兵工程学院于尚易副教授对编写工作提出了宝贵意见，在此表示衷心感谢。限于编者水平，不妥之处在所难免，恳请有关专家、教师批评指正。

编 者
2009 年 7 月

目 录

第 1 章 函数	1
习题 A	1
习题 B	4
第 2 章 极限和连续	10
习题 A	10
习题 B	16
第 3 章 导数与微分	21
习题 A	21
习题 B	29
习题 C	36
第 4 章 不定积分	45
习题 A	45
习题 B	55
第 5 章 定积分及其应用	64
习题 A	64
习题 B	73
第 6 章 多元函数微积分	83
习题 A	83
习题 B	88
第 7 章 常微分方程	94
习题 A	94
习题 B	100
第 8 章 级数	106
习题 A	106
习题 B	113
第 9 章 行列式矩阵与线性方程组	121
习题 A	121
习题 B	125
第 10 章 概率统计初步	129
习题 A	129
习题 B	133
参考答案	137

第1章 函 数

习题A

一、选择题.

- 下列各函数中, 属于基本初等函数的是 ().
A. $f(x) = x^2 + 1$ B. $f(x) = 3x^2$
C. $f(x) = x^{\sqrt{2}}$ D. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$
- 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 则 $f(\ln x)$ 的定义域是 ().
A. $[0, 1]$ B. $[0, 2]$ C. $[1, e]$ D. $[1, 2]$
- 函数 $y = 2^{x-1}$ 的反函数是 ().
A. $\log_2(x+1)$ B. $\frac{1}{2}\log_2 x$ C. $\log_2 x + 1$ D. $2\log_2 x$
- 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 则函数 $g(x) = f\left(x + \frac{1}{4}\right) + f\left(x - \frac{1}{4}\right)$ 的定义域为 ().
A. $[0, 1]$ B. $\left[-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right]$ C. $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ D. $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$
- 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有定义, 则下列函数中必定是偶函数的是 ().
A. $[f(x)]^2$ B. $|f(x)|$ C. $x^2 f(x)$ D. $x^2 f(\cos x)$
- 设 $f(x) = x^3 - x^2 - 1$, 则 $f(f(1)) =$ ().
A. -1 B. -3 C. 0 D. 1
- 下列函数中既是奇函数又是单调增加函数的是 ().
A. $\sin^3 x$ B. $x^3 + 1$ C. $x^3 + x$ D. $x^3 - x$
- $f(x) = \sin(x^2 - x)$ 是 ().
A. 有界函数 B. 周期函数 C. 奇函数 D. 偶函数
- 如果 $y = u^2$, $u = \log_a x (a > 0, u \neq 1)$, 则 $y =$ ().
A. $\log_a x^2$ B. $\log_a^2 x$ C. $2\log_a x$ D. $\log_{a^2} x$
- 下列函数中不是初等函数的是 ().
A. $y = 10^{\sqrt{x}}$ B. $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ C. $y = \ln(1-x)$ D. $f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$
- 下列各选项中, 函数相等的是 ().

- A. $f(x) = 2 \ln x$, $g(x) = \ln x^2$ B. $f(x) = \frac{x}{x}$, $g(x) = 1$
- C. $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = x$ D. $f(x) = -\operatorname{sgn}(1-x)$, $g(x) = \begin{cases} -1, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$
12. 下列函数的图形与 $y = 2^{x-1}$ 的图形关于 $y = x$ 对称的是 ().
- A. $y = \log_2(x+1)$ B. $y = 1 + \log_2 x$
- C. $y = \frac{1}{2} \log_2 x$ D. $y = 2 \log_2 x$
13. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$, 则 $g(f(x)) =$ ().
- A. $1 + f(x)$ B. $1 - f(x)$ C. $f(x) - 1$ D. $f(x)$
14. 函数 $y = \frac{\arcsin(1-x)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域是 ().
- A. $[0, 2]$ B. $(1, +\infty)$ C. $(1, 2]$ D. $[1, 2]$
15. 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, 当 $x \neq 0$ 时, $f\left[\frac{1}{f(x)}\right] =$ ().
- A. $\frac{x-1}{x}$ B. $\frac{x}{x-1}$ C. $1-x$ D. x

二、填空题.

1. 设 $f(x) = 3x^2 - 1$, 则 $f(\sqrt{3}) =$ _____.
2. 已知函数 $f(x+1)$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 则 $f(x)$ 的定义域是 _____.
3. 函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 < x < 1 \\ x-1, & 1 < x < 3 \end{cases}$ 的定义域是 _____, $f\left(\frac{1}{2}\right) =$ _____.
4. 函数 $y = x^2 - 1$ 的图像关于 _____ 轴对称.
5. 已知 $f(x) = \sin x$, $f(\varphi(x)) = 1 - x^2$, 则 $\varphi(x) =$ _____, 定义域为 _____.
6. 设 $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$, 则 $f[g(x)] =$ _____.
7. $f(x) = \ln|x| - \sec x$ 是 _____ (奇或偶) 函数.
8. 设 $f(x) = \lg 7$, 则 $f(x+1) - f(x-1) =$ _____.
9. 函数 $y = \arcsin(x-3)$ 的定义域为 _____.
10. 设 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, 求 $f(0) =$ _____, $f(a) =$ _____.

三、求下列函数的函数值.

1. $f(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$, 求 $f(2)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(a)$.

2. $f(x) = |1+x| + \frac{9(x-1)}{|2x-5|}$, 求 $f(-2)$, $f(0)$.

3. 已知 $f(x) = \frac{1-x}{1+x} (x \neq -1)$, $g(x) = 1-x$, 求 $f(f(x))$, $g(g(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$ 的表达式, 并指出它的定义域.

四、求下列函数的反函数.

1. $y = \sqrt[3]{x+1}$.

2. $y = \frac{1-\sqrt{1+2x}}{1+\sqrt{1+2x}}$.

五、应用题.

某运输公司规定吨公里（每吨货物每公里）运价在 a 公里以内 k 元, 超过 a 公里的部分 8 折优惠. 求每吨货物运价 m （元）和路程 s （公里）之间的函数关系.

习题B

一、选择题.

- 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 则 $f(x-2)$ 的定义域为 ().
A. $[1,2]$ B. $[2,3]$ C. $[0,1]$ D. $[-1,0]$
- 函数 $y = \ln(2^x - 1)$ 的定义域为 ().
A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$ C. $[1,2]$ D. $[0, +\infty)$
- 设 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 则 $f[f(-1)] =$ ().
A. 2 B. -1 C. 1 D. ∞
- 下列各对函数中表示同一函数关系的是 ().
A. $\ln x^2$ 与 $2\ln x$ B. $e^{\frac{1}{2}\ln x}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{x}}$
C. $(\sqrt{x})^2$ 与 $\sqrt{x^2}$ D. x 与 $\sin(\arcsin x)$
- 设 $f(x) = \frac{4x}{x-1}$, 则 $f^{-1}(3) =$ ().
A. 3 B. -3 C. 4 D. -4
- 设 $g(x) = 1-x$, 并且当 $x \neq 0$ 时有 $f(g(x)) = \frac{x}{1-x}$, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right) =$ ().
A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. 0 D. 1
- 设 $f(x) = 4x^2 + bx + 5$, 若 $f(x+1) - f(x) = 8x + 3$, 则 b 应为 ().
A. 1 B. -1 C. 2 D. -2
- $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{3} \end{cases}$, 则 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$ ().
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 2 D. -2
- 函数 $y = \frac{1}{2^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内是 ().
A. 有界函数 B. 无界函数 C. 常量 D. 无穷大量
- 函数 $y = \arcsin x + \sqrt{1-x}$ 的定义域是 ().
A. $[0,1]$ B. $[1,2]$ C. $[0,1] \cup [2,3]$ D. $[-1,1]$.
- 下列表示同一个函数的是 ().
A. $\lg(x+2)^2$ 和 $2\lg(x+2)$ B. $\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}$ 和 $x+3$
C. $\sqrt{(x+1)(x-1)}$ 和 $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$ D. $\sqrt{(x+3)^2}$ 和 $|x+3|$

12. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{x}$, 则 $f^{-1}(x) =$ ().
 A. $x-1$ B. $x+1$ C. $-x-1$ D. $-x+1$
13. 设 $f(x) = \cos(\sin x)$, $g(x) = \sin(\sin x)$, 则 ().
 A. $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数 B. 两个都是偶函数
 C. $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数 D. 两个都是奇函数
14. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 则 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的定义域为 ().
 A. $\left[-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right]$ B. $\left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ C. $\left[\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right]$ D. $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.
15. 设 $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = 2^x$, 则 $f[\varphi(x)] =$ ().
 A. 2^{x^2} B. x^{2x} C. x^{2^x} D. 2^{2x} .

二、填空题.

1. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ 的定义域是_____.
2. 已知函数 $f(2x) = 3x-1$, 且 $f(a) = 4$, 则 $a =$ _____, $f(2) =$ _____.
3. 函数 $y = \sqrt{x+3}$ ($x \geq 0$) 的反函数是_____.
4. 函数 $y = \lg(x-1) + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域为_____.
5. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 求 $g(x) = f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域_____.
6. 设 $f(x) = e^{x-1}$, 则 $f(\ln(f(x))) =$ _____.
7. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,2]$, 则函数 $f(x+1) + f(x-1)$ 的定义域是_____.
8. 若 $f(x+1) = x + \cos x$, 则 $f(1) =$ _____.
9. 函数 $f(x) = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-3} + \lg(4-x)$ 的定义域为_____.
10. 函数 $y = \left|\sin \frac{x}{2}\right|$ 的最小正周期是_____.

三、求函数值.

1. $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$, 求 $f(1)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f(\pi)$.

2. 已知分段函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & x > 1 \end{cases}$, 求 $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$.

3. 已知 $f(x-1) = x^2 + 2x + 1$, 求 $f(x)$.

四、求下列函数的定义域.

1. $y = \sqrt{x+2} + \frac{1}{1-x^2}$.

2. $y = \arcsin \frac{x-1}{2} + \sqrt{x-2}$.

$$3. \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} + \ln(x + 4).$$

$$4. \quad f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x - 2}}.$$

$$5. \quad f(x) = \frac{\sqrt{2x + 1}}{2x^2 - x - 1}.$$

6. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求函数 $y = f(4x^2)$, $y = f(x - 2)$, $y = f(\tan x)$ 的定义域.

五、判定下列函数的奇偶性.

1. $f(x) = 5x^2 - \cos x + 1$

2. $g(x) = \sin x + \cos x$.

3. $l(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

4. $h(x) = x \frac{a^x - 1}{a^x + 1} \quad (a > 1)$.

六、指出下列函数是怎样复合而成的.

1. $y = 5^{(2x+1)^2}$.

$$2. \quad y = \arcsin(3^{-x^2}).$$

$$3. \quad y = \arctan(\ln 3x).$$

$$4. \quad y = \sqrt{\ln(1-3x)}.$$

七、应用题.

1. 一商家销售每种商品的价格满足关系 $P = 7 - 0.2x$ (万元/吨), x 为销售量, 商品的成本函数为 $C = 3x + 1$ (万元). 若每销售一吨商品税务部门征税 t (万元), 试将该商家税后利润 L 表示为 x 的函数.

2. 某工厂生产某种产品的年产量为 x 台, 每台售价为 250 元, 当年产量在 600 台内时可全部售出, 当年产量超过 600 台时经广告宣传后可再多售出 200 台, 每台的平均广告费用为 20 元, 若生产再多, 本年就售不出去了. 试建立本年的销售收入 R 与年产量 x 之间的函数关系.

第2章 极限和连续

习题A

一、选择题.

1. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处有定义是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的 ().
A. 必要非充分条件 B. 充分非必要条件
C. 充分必要条件 D. 无关条件.
2. 已知下列四数列: ① $x_n = 2$; ② $x_n = \frac{2}{3n+1}$; ③ $x_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{3n+1}$; ④ $x_n = (-1)^{n-1} \frac{3n-1}{3n+1}$; 则其中收敛的数列为 ().
A. ① B. ①② C. ①④ D. ①②③
3. 设 $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ 为奇数} \\ 10^{-7}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则必有 ().
A. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ B. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 10^{-7}$
C. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ 10^{-7}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ D. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在
4. 设 $f(x) = \begin{cases} |x|+1, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 的值为 ().
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
5. 下列变量在自变量给定的变化过程中不是无穷大的是 ().
A. $\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} (x \rightarrow +\infty)$ B. $\ln x (x \rightarrow +\infty)$
C. $\ln x (x \rightarrow 0^+)$ D. $\frac{1}{x} \cos \frac{nx}{2} (x \rightarrow \infty)$
6. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x) = x + \cos x$ 是 ().
A. 无穷小量 B. 无穷大量 C. 有极限且极限不为零 D. 有界函数
7. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 是函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续的 ().
A. 必要条件 B. 充分条件 C. 充要条件 D. 无关条件
8. $y = x^2 + 1, x \in (-\infty, 0]$ 的反函数是 ().

- A. $y = \sqrt{x} - 1, x \in [1, +\infty)$ B. $y = -\sqrt{x} - 1, x \in [0, +\infty)$
 C. $y = -\sqrt{x-1}, x \in [1, +\infty)$ D. $y = \sqrt{x-1}, x \in [1, +\infty)$
9. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 不连续是因为 ().
 A. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 不存在 B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 不存在
 C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$ D. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq f(0)$
10. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, α 和 $\beta (\neq 0)$ 都是无穷小. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 下列变量中可能不是无穷小的是 ().
 A. $\alpha + \beta$ B. $\alpha - \beta$ C. $\alpha \cdot \beta$ D. $\frac{\alpha}{\beta}$
11. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列函数中为 x 的高阶无穷小的是 ().
 A. $1 - \cos x$ B. $x + x^2$ C. $\sin x$ D. \sqrt{x}
12. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限为 ().
 A. 2 B. 0 C. ∞ D. 不存在但也不为无穷大
13. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x)^2$ 是 $\sin^2 x$ 的 ().
 A. 高阶无穷小 B. 同阶无穷小, 但不等价
 C. 低阶无穷小 D. 等价无穷小
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 ax}{x^3}$ (a 为常数) 等于 ().
 A. 0 B. 1 C. a^3 D. $\frac{1}{a^3}$
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} =$ ().
 A. $e+1$ B. e C. 1 D. ∞
16. 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 那么 $e^x =$ ().
 A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{nx}$ D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{x}{n}}$
17. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{2n-1}\right)^2 =$ ().
 A. 0 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. ∞

二、填空题.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} =$ _____.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ ax+b, & x > 0 \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, 当 $b =$

时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

3. 设 $\alpha(x)$ 是无穷小量, $E(x)$ 是有界变量, 则 $\alpha(x)E(x)$ 为 .

4. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. $x=1$ 是函数 $\frac{1}{x-1}$ 的第 类 型间断点.

6. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan ax}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$, 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & |x| < 2 \\ 1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$, 则 $f(x+1)$ 的定义域是 .

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{x^2} + \frac{\sin 3x}{x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 且 $f(1)=3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. $x=0$ 是函数 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ 的第 类 型间断点.

11. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{2}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 1)}$ 的间断点是 , 其中可去间断点是 , 跳跃间

断点是 .

三、计算题.

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 3 \\ 0, & x = 3 \\ x^2, & x > 3 \end{cases}$, 试画出 $f(x)$ 的图形, 并求单侧极限 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.

2. 设 $f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{x}$, 回答下列问题:

1) 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左右极限是否存在?

- 2) 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否有极限?
3) 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否有极限?

3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+1}{x^2+1}.$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x+1}{3x^2+1}.$

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}.$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}).$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^{300} (3x-2)^{200}}{(2x+1)^{500}} .$

8. 已知 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + ax + b}{1-x} = 1$, 求常数 a 与 b 的值.

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x .$

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{\pi}{2^n} \quad (x \neq 0) .$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\cot^2 x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^2}{\sin 3x}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1) \tan x}{x \ln(1 + 3x)}.$$

15. 设 $x \rightarrow 0$ 时, ax^3 与 $(\tan x - \sin x)$ 为等价无穷小, 求常数 a 的值.

习题B

一、选择题.

- 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在, 则 ().
 A. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 都不存在
 B. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 都存在
 C. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 存在, $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 不存在
 D. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 存在, $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 不存在
- 已知下列四数列:
 ① $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$ ② $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2^2}, 0, \frac{1}{2^3}, \dots, 0, \frac{1}{2^n}, \dots$
 ③ $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{1}{n+1}, \frac{n+2}{n+1}, \dots$ ④ $1, 2, \dots, n, \dots$
 则其中发散的数列为 ().
 A. ① B. ①④ C. ①③④ D. ②④
- 从 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ 不能推出 ().
 A. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 1$ C. $f(x) = 1$ D. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - 1] = 0$
- 当 $x \rightarrow 1$ 时, 下列变量中是无穷小的是 ().
 A. $x^3 - 1$ B. $\sin x$ C. e^x D. $\ln(x+1)$
- 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, 则下列极限成立的是 ().
 A. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \infty$ B. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = 0$
 C. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) + g(x)} = \infty$ D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \infty$
- 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{e^x}{1-x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内间断点的个数是 ().
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- 方程 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内 ().
 A. 无实根 B. 有惟一实根 C. 有两个实根 D. 有三个实根
- 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 下列函数中有极限的是 ().
 A. $\sin x$ B. $\frac{1}{e^x}$; C. $\frac{x+1}{x^2-1}$ D. $\arctan x$
- 设 $f(x) = x^2 + \operatorname{arccot} \frac{1}{x-1}$, 则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的 ().
 A. 可去间断点 B. 跳跃间断点 C. 无穷间断点 D. 连续点

10. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 若 $\sin^2 \frac{1}{n}$ 与 $\frac{1}{n^k}$ 是等价无穷小, 则 $k =$ ().
 A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 3
11. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $n \sin \frac{1}{n}$ 是 ().
 A. 无穷大量 B. 无穷小量 C. 无界变量 D. 有界变量
12. 方程 $x^3 + px + 1 = 0$ ($p > 0$) 的实根个数是 ().
 A. 一个 B. 二个 C. 三个 D. 零个
13. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{95}(ax+1)^5}{(x^2+1)^{50}} = 8$, 则 a 的值为 ().
 A. 1 B. 2 C. $\sqrt[5]{8}$ D. A. B. C 均不对
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx+d}$ 等于 ().
 A. e B. e^b C. e^{ab} D. e^{ab+d}
15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) =$ ().
 A. 0 B. $\frac{3}{2}$ C. 3 D. ∞
16. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} =$ ().
 A. 2 B. 4 C. 1 D. 0

二、填空题.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =$ _____.
2. 设 $y = \frac{1}{x+1}$, 当 $x \rightarrow$ _____ 时, y 是无穷小量, 当 $x \rightarrow$ _____ 时, y 是无穷大量.
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) - A$ 为 _____.
4. $x = 0$ 是函数 $\frac{\sin x}{|x|}$ 的第 _____ 类 _____ 型间断点.
5. 设 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, 若定义 $f(0) =$ _____, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.
6. $f(x) = \frac{1}{\ln(x-1)}$ 的连续区间是 _____.
7. 函数 $f(x) = \sqrt{x} + \ln(3-x)$ 在 _____ 连续.
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x =$ _____.
9. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 无穷小量 $\frac{1}{x^k}$ 与 $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}$ 等价, 则 $k =$ _____.

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

11. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+kx^2} - 1$ 与 $(\arcsin x)^2$ 是等价无穷小, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、计算题.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}.$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}x}{1+x^2}.$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right).$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+(n-1)}{n^2}.$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{x^{\frac{2}{x}}}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sin x \right).$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^x.$$

11. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-c} \right)^x = 2$, 求 c .

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 x}$.

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right)$.

14. 要使 $f(x)$ 连续, 常数 a, b 应取何值?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} + b, & x > 0 \end{cases}$$

第3章 导数与微分

习题A

一、选择题.

1. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线平行于 x 轴, 则 $f'(x_0)$ ().
A. 小于零 B. 等于零 C. 大于零 D. 不存在
2. 函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处 ().
A. 无定义 B. 不连续 C. 可导 D. 连续但不可导
3. 在函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域上的一点 x_0 , 下列说法正确的是 ().
A. 若 $f(x)$, $g(x)$ 中至少一个不可导, 则 $f(x)+g(x)$ 不可导
B. 若 $f(x)$, $g(x)$ 均不可导, 则 $f(x)+g(x)$ 不可导
C. 若 $f(x)$ 可导, $g(x)$ 不可导, 则 $f(x)g(x)$ 必不可导
D. 若 $f(x)$ 可导, $g(x)$ 不可导, 则 $f(x)+g(x)$ 必不可导
4. 直线 l 与 x 轴平行且与曲线 $y=x-e^x$ 相切, 则切点为 ().
A. $(1,1)$ B. $(-1,1)$ C. $(0,1)$ D. $(0,-1)$
5. 设隐函数 $y=y(x)$ 由 $e^y=xy$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx}$ 不等于 ().
A. $\frac{y}{e^y-x}$ B. $\frac{y}{x(y-1)}$ C. $\frac{e^y-y}{x}$ D. $\frac{y^2}{e^y(y-1)}$
6. 已知 $y=x\ln x$, 则 $y^{(3)}=()$.
A. $\frac{1}{x^2}$ B. $\frac{1}{x}$ C. $-\frac{1}{x^2}$ D. $\frac{2}{x^3}$
7. $y=x^n+e^{\alpha x}$, 则 $y^{(n)}=()$.
A. $\alpha^n e^{\alpha x}$ B. $n!$ C. $n!+e^{\alpha x}$ D. $n!+\alpha^n e^{\alpha x}$
8. 设 $y=\cos x^2$, 则 $dy=()$.
A. $-2x\cos x^2 dx$ B. $2x\cos x^2 dx$ C. $-2x\sin x^2 dx$ D. $2x\sin x^2 dx$
9. 设 $y=f(u)$ 是可微函数, u 是 x 的可微函数, 则 $dy=()$.
A. $f'(u)u dx$ B. $f'(u)du$ C. $f'(u)dx$ D. $f(u)u' du$
10. 用微分近似计算公式求得 $e^{0.05}$ 的近似值为 ().

- A. 0.05 B. 1.05 C. 0.95 D. 1
11. 设 $y = x \sin x$, 则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (\quad)$.
- A. -1 B. 1 C. $\frac{\pi}{2}$ D. $-\frac{\pi}{2}$
12. 已知 $f'(3) = 2$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} = (\quad)$.
- A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. 1 D. -1
13. 下列命题正确的是 ().
- A. 若 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, 则必有 $f'(x_0) = 0$
- B. 若 $f'(x_0) = 0$, 则点 x_0 必为 $f(x)$ 的极值点
- C. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内有极大值, 也有极小值, 则极大值必定大于极小值
- D. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且点 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, 则必有 $f'(x_0) = 0$
14. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内 ().
- A. 单调 B. 有界 C. 可导 D. 可微
15. 曲线 $y = \sqrt{x}$ 在点 $(1, 1)$ 的切线斜率是 ().
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ C. 1 D. 0
16. 下列函数中不是隐函数的 ().
- A. $y = \ln(x+1)$ B. $y - 1 - \sin x = 0$
- C. $x^2 + y^2 = 1$ D. $x + y + \sin[(x-1)y] = 3$
17. 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x$ 在 $(0, 2)$ 内的驻点 $x = (\quad)$.
- A. -1 B. 0 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

二、填空题.

1. 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 若 $f'(0)$ 存在且 $f(0) = 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设 $f(1) = 2$, 且 $f'(1) = 3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 在曲线 $y = e^x$ 上取横坐标 $x_1 = 0$ 及 $x_2 = 1$ 两点, 做过这两点的割线, 则曲线在 $y = e^x$ 在点 $\underline{\hspace{2cm}}$ 处的切线 $\underline{\hspace{2cm}}$ 平行于这条割线.
6. 当物体的温度高于周围介质的温度时, 物体就不断冷却, 若物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T = T(t)$, 则该物体在时刻 t 的冷却速度为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
7. 一物体作变速直线运动, 其位移关于时间 (单位: s) 的函数为 $s(t) = t^2$ (单位: m),

则其速度函数_____ (单位: m/s), 则物体在1s时的瞬时速度为_____ (单位: m/s).

8. $(\sqrt{2})' =$ _____.

9. 设 $y = e^{2x}$, 则 $y' =$ _____.

10. 设 $y = \arcsin x^2$, 则 $y' =$ _____.

11. 设 $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$, 则 $y' =$ _____.

12. 设 $y = \sqrt[3]{5x+1}$, 则 $y' =$ _____.

13. 设 $y = \ln \cos \frac{1}{x}$, 则 $y' =$ _____.

14. 设 $y = f(3x)$, 且 $f(u)$ 可导, 则 $y' =$ _____.

15. 设 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$ 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

16. $y = 2x^2 + \ln x$, 则 $y''|_{x=1} =$ _____.

17. $y = \frac{1}{1+2x}$, $y^{(6)} =$ _____.

18. $y = 10^x$, 则 $y^{(n)}(0) =$ _____.

19. $y = \sin 2x$, 则 $y^{(n)} =$ _____.

20. 设 $y = x^3 - x$ 在 $x_0 = 2$ 处 $\Delta x = 0.01$, 则 $\Delta y =$ _____, $dy =$ _____.

三、计算题.

1. 设 $y = 2^{\frac{1}{\cos x}}$, 求 dy .

2. 设 $y = \frac{1}{2}e^x \arcsin x$, 求 y' .

3. 设 $y = \frac{1 - (\sqrt{x})^3 + \sqrt{2x}}{\sqrt{x}}$, 求 dy .

4. 设 $y = 5\sqrt{\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x-3)(x-4)^3}}$, 求 y' .

5. 函数 $y = y(x)$ 由方程 $xy + e^x y = e$ 所确定, 求 $y'(0)$.

6. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, 求 y' .

7. 设 $f'(x_0)$ 存在, 求以下两个极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}.$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}.$

8. 设 $f'(1) = 2$, 求以下两个极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(4 - 3x) - f(1)}{x - 1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(4 - 3x) - f(3 - 2x)}{x - 1}.$

9. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2x) - f(1)}{x} = \frac{1}{4}$, 则 $f'(1)$ 为多少?

10. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(x_0 - 2h) - f(x_0)} = \frac{1}{4}$, 求 $f'(x_0)$.

11. 设极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{1}{4}$ 存在, 问 $f'(x_0)$ 是否存在?

12. 求下列函数的导数.

(1) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

$$(2) \quad y = x^{\sin x}.$$

13. 求下列函数的微分.

$$(1) \quad y = 5^{\ln(\tan x)}.$$

$$(2) \quad y = (1 + x^2) \arctan x.$$

$$(3) \quad y = \arctan \sqrt{x} \cdot e^{-3x}.$$

$$(4) \quad y = f(e^x) \cdot e^{f(x)}.$$

14. 求下列函数的 n 阶导数.

$$(1) \quad y = \frac{1}{x+1}.$$

$$(2) \quad y = \ln 2(x+3).$$

$$(3) \quad y = xe^x.$$

习题B

一、选择题.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = (\quad)$.
A. $-\infty$ B. 0 C. $+\infty$ D. 不存在
- 函数 $y = 1 - \sqrt{3 + 2x - x^2}$ 的最大值是 (\quad) .
A. 1 B. 2 C. 3 D. 0
- 函数 $y = x^3 + 12x + 1$ 在定义域内是 (\quad) .
A. 单调减少 B. 单调增加 C. 非单调的 D. 不一定
- 设 $f(x)$ 具有一阶、二阶导数, 且在 x_0 点处有 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, 则点 x_0 必为函数 $f(x)$ 的 (\quad) .
A. 极小值点 B. 极大值点 C. 最小值点 D. 最大值点
- 设 $y = \sin^2 x$, 则 $y' = (\quad)$.
A. $-\sin 2x$ B. $\sin 2x$ C. $\cos 2x$ D. $-\cos^2 x$
- 若 $y = x^2 e^x$, 则 $y' = (\quad)$.
A. $2xe^x$ B. $(x^2 + 2x)e^x$ C. $x^2 e^x$ D. $(2x + 1)e^x$
- $y = x^4 - 3$ 在 N 点切线斜率为 4, 则 N 点为 (\quad) .
A. $(1, -3)$ B. $(1, -2)$ C. $(-1, -2)$ D. $(-1, 3)$
- 若 $y = f(e^{2x})$, 则 $dy = (\quad)$.
A. $2f'(e^{2x})dx$ B. $f'(e^{2x})dx$ C. $2f'(e^{2x})e^{2x}dx$ D. $f'(e^{2x})e^{2x}dx$
- 设 $f(x) = \ln \frac{1}{x} - \ln 2$, 则 $f'(x) = (\quad)$.
A. $x - \frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}$ C. x D. $-\frac{1}{x}$
- 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 则当 $|\Delta x|$ 很小时, $f(x_0 + \Delta x) \approx (\quad)$.
A. $f(x_0)$ B. $f'(x_0)\Delta x$ C. Δy D. $f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$
- 若 $y = \cos(x^2)$, 则 $y' = (\quad)$.
A. $2x \sin(x^2)$ B. $-2x \sin(x^2)$ C. $-2 \cos(x^2)$ D. $-\sin 2x$
- 若 $y = \frac{x}{2}$, 则 $dy = (\quad)$.
A. $\frac{1}{2}dx$ B. $2dx$ C. xdx D. $-\frac{1}{2}dx$
- 若 $y = \sec x$, 则 $y' = (\quad)$.
A. $\sec x \cot x$ B. $-\sec x \cot x$ C. $\sec x \tan x$ D. $\csc x \tan x$
- 曲线 $y = e^x$, 则 (\quad) .
A. 仅有铅直渐近线 B. 仅有水平渐近线

- C. 既有铅直渐近线又有水平渐近线 D. 无渐近线
15. 函数 $f(x) = \frac{x+1}{2x}$ 满足拉格朗日中值定理条件的区间是 ().
 A. $[1,2]$ B. $[-2,2]$ C. $[-2,0]$ D. $[0,1]$
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(1 + x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$, 则此计算 ().
 A. 正确
 B. 错误, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x^2}$ 不是 $\frac{0}{0}$ 型未定式
 C. 错误, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(1 + x^2)'}$ 不存在
 D. 错误, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x^2}$ 不是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式
17. 曲线 $y = (x-1)^3 - 1$ 的拐点是 ().
 A. $(2,0)$ B. $(1,-1)$ C. $(0,-2)$ D. 不存在的
18. 函数 $y = x^{\frac{2}{3}} + 5$ 可能存在的极值点是 ().
 A. $x = 5$ B. $x = 0$ C. $x = 1$ D. 不存在的.

二、填空题.

1. $2x^2 dx = d$ _____.
2. 设 $y = a^x + \arccos x$, 则 $dy =$ _____ dx
3. d _____ $= \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.
4. 设 $y = e^{\sqrt{\sin 2x}}$, 则 $dy =$ _____ $d(\sin 2x)$.
5. 设 $y = e^x \sin x$, 则 $dy =$ _____ $d(e^x) +$ _____ $d(\sin x)$.
6. 设 $f(x) = \ln 2x + 2e^{\frac{1}{2}x}$, 则 $f'(2) =$ _____.
7. 当 $h \rightarrow 0$ 时, $f(2+h) - f(2) - 2h$ 是 h 的高阶无穷小, 则 $f'(2) =$ _____.
8. 设 $y = e^x \ln x$, 则 $dy =$ _____.
9. 设 $f(x) = \ln \cot x$, 则 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ _____.
10. 曲线 $y = \ln x + e^x$ 在 $x = 1$ 处的切线方程是 _____.
11. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ \tan x, & x < 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的导数为 _____.
12. 设 $y = e^{\cos x}$, $y'' =$ _____.
13. 设 $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$, 其中 $f(u)$ 为二阶可导函数, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.
14. 设 $y = x^3 + \ln(1+x)$, 则 $dy =$ _____.
15. 设方程 $x^2 + y^2 - xy = 1$ 确定隐函数 $y = y(x)$, 则 $y' =$ _____.

16. 曲线 $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x} + e^{2x}$ 在点 $(-1, e^{-2})$ 处的切线方程为_____.

17. 设 $y = (1+3x)^{100} + 3\log_2 x + \sin 2x$, 则 $y'' =$ _____.

18. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^2}{2x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f'(0) =$ _____.

19. 曲线 $y = xe^y$ 在点 $x=0$ 处切线方程为_____.

20. 设 $f(x)$ 可导, 则 $[f(x^2)]' =$ _____.

三、计算题.

1. $y = (2x^2 + \sin^3 x)^4$, 求 y' .

2. $y = \sqrt{\sin 3x} + \ln \frac{x^4}{2}$, 求 dy .

3. 求曲线 $y^2(2a-x) = x^3$ 在点 (a, a) 处的切线方程.

4. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2 \cos x}$.

5. 求函数 $f(x) = 2x^2 - \ln x$ 的单调区间.

6. 求 $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值最小值.

7. 当 a 为何值时, 曲线 $y = ax^2$ 与曲线 $y = \ln x$ 相切?

8. 讨论 $y=|x-1|$ 在点 $x=1$ 处的连续性和可导性.

9. 讨论函数 $f(x) \begin{cases} \frac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的可导性.

10. 求下列函数的导数.

(1) $y = \ln \sin x$.

(2) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$.

$$(3) \quad y = [\arctan(x^2 + 1)]^2.$$

$$(4) \quad y = e^{\sin \frac{1}{x}}.$$

$$(5) \quad y = e^{x^2}.$$

$$(6) \quad y = e^{3\sin^2 x}.$$

$$(7) \quad y = \sqrt{\sin^2(e^{2x}) + \cos \frac{\pi}{3}}.$$

(8) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \quad (x > 0).$

11. 确定函数 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

12. 求函数 $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x$ 在区间 $[-2, 3]$ 上的最大值与最小值.

13. 求函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 的极值.

14. 在曲线 $y^2 = 2x$ 上求一点, 使它到定点 $(a, 0)$ 的距离为最短, 并求此最短距离.

习题C

一、选择题.

1. 下列曲线下凹的是 ().

- A. $y = e^{-x}$ B. $y = \ln(1+x^2)$ C. $y = x^2 - x^3$ D. $y = \sin x$

2. 曲线 $y = e^{-x^2}$ ().

- A. 没有拐点 B. 有一个拐点 C. 有二个拐点 D. 有三个拐点

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{3}} = ().$

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $-\frac{3}{2}$

4. 区间 $[-1, 1]$ 上满足拉格朗日中值定理条件的函数是 ().

- A. $y = \ln(x+1)$ B. $y = \frac{\sin x}{x}$ C. $y = x^2 + 5$ D. $y = |x|$

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = ().$

- A. 1 B. -1 C. 0 D. 2

6. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻区内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = -1$, 在点 x_0 处 ().

- A. $f(x)$ 取得极小值 B. $f(x)$ 取得极大值
C. $f(x)$ 不取得极值 D. $f''(x_0) = -1$

7. 函数 $y = x \ln x$ 在区间 ().

- A. $(0, +\infty)$ 内单调减少 B. $(0, +\infty)$ 内单调增加
C. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 内单调减少 D. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 内单调减少

8. 使函数 $y = \arctan(x^2)$ 单调增加的区间是 ().

- A. $(-1, 1)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(-\infty, +\infty)$

9. 设 $y = x^2 \sin x$, 则 $y''(0) = ().$

- A. 0 B. 2 C. 1 D. -1

10. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导, 且 $f'(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\sin x} = -\frac{1}{2}$, 则有 ().

- A. $f(0)$ 一定是 $f(x)$ 的一个最大值 B. $f(0)$ 一定是 $f(x)$ 的一个最小值
C. $f(0)$ 一定是 $f(x)$ 的一个极大值 D. $f(0)$ 一定是 $f(x)$ 的一个极小值

11. 设 $x > 0$, 那么有 ().

- A. $\frac{x}{1+x} > \ln(1+x)$ B. $\ln(1+x) > x$
C. $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$ D. $\frac{x}{1+x} > x$

12. 函数 $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ ().
 A. 有驻点 $x = 0$; B. 有极值点 $x = 0$;
 C. 有两个驻点 $x = \pm 1$; D. 没有驻点.
13. 设 $f(x)$ 在点 $x = 2$ 处可导, 且 $f'(2) = 1$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h} = ()$
 A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. -1
14. 函数 $y = ax^2 + c$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 则 a, c 应满足 ().
 A. $a < 0$, 且 $c = 0$ B. $a > 0$ 且 c 是任意实数
 C. $a < 0$, 且 $c \neq 0$ D. $a < 0$ 且 c 是任意实数
15. 设 $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $y'(0) = ()$.
 A. 0 B. 2 C. 1 D. -2
16. 函数: $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ 的极小值点为 ().
 A. 0 B. -1 C. 1 D. 不存在
17. 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ x^2 + x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处 ().
 A. 连续可导 B. 连续不可导 C. 不可导 D. 不连续不可导

二、填空题.

1. 一质点作直线运动, 若每秒末它离起点的距离是 $s = 3t - t^2$ 米, 则其初速度为_____米/秒, 它向上运动_____秒后开始向下运动.
2. $f(x) = \cos|x|$, 则 $f'(0) =$ _____.
3. 函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ 的极小值点 $x =$ _____.
4. 若 $e^{x-y} + x^2 + y^2 = 0$, 则 $y' =$ _____.
5. 设 $f(x) = x^2 e^{-x}$, 则 $f''(x) =$ _____.
6. 函数 $f(x) = x^3 - ax^2 + 7$ 在 $x = 2$ 时有极大值, 此时 $a =$ _____.
7. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是连续的, 且单调减少, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值是_____, 最小值是_____.
8. 设函数 $y = x^n$, 则 $y^{(n)} =$ _____.
9. 微分 $d(\sin 2x + \cos x) =$ _____.
10. $y = x^2$ 在 x_0 处的改变量与微分之差 $\Delta y - dy =$ _____.
11. 设 $y = e^{-2x}$, 则 $y^{(n)} =$ _____.
12. 设 $y = 1 + xe^y$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____, $\frac{dx}{dy} =$ _____.
13. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^3+1} =$ _____.

14. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 - x^2}{\cos \frac{\pi x}{2a}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. 函数 $y = (x-2)^2$ 在区间 $[0, 4]$ 上的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

16. 一阶导数不存在的点可能是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

17. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ -2, & x = 1 \end{cases}$, 那么函数 $f(x)$ 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

18. 若 $y = \cos(\cos x)$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、计算题.

1. 求函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的导数.

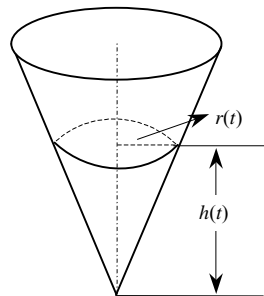
2. 设 $y = \ln \tan e^{x^2}$, 求 y' .

3. 求函数 $y = x^2$ 在 $[1, 2]$ 区间上满足拉格朗日中值定理的 ξ 值.

4. 设有分段函数 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \sin ax + b, & x > 0 \end{cases}$, 问 a, b 取何值时, $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的可导函数.

导函数.

5. 一个圆锥形容器, 其高与直径相等 (如右图), 水以每分钟 $\frac{2}{3} \text{ m}^3$ 的速度注入容器, 求在任意时刻容器内水位的上升速度.



6. 求曲线 $y = \ln x$ 在 $x = e$ 处的切线方程和法线方程.

7. 求由下列方程所确定的隐函数的导数.

(1) $x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$.

(2) $xy = e^{x+y}$.

(3) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$.

8. 求下列函数的二阶导数.

(1) $y = \frac{\sin 2x}{x}$.

(2) $y = \frac{\sin 2x}{e^x}$.

$$(3) \quad y = \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1-x^2}.$$

$$(4) \quad y = \left(\frac{a}{x}\right)^b + \left(\frac{a}{b}\right)^x \quad (a, b \text{ 为常数}).$$

9. 求由方程 $x + y + \sin(x-1)y = 3$ 所表示的曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程.

10. 求下列函数的极限.

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right).$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{1+x} - 1}.$$

$$11. \text{ 已知函数 } f(x) \text{ 在 } 0 \text{ 点可导, 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(mx) - f(nx)}{x} \quad (m, n \text{ 为常数}).$$

$$12. \text{ 求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} (3x + e^x)^{\frac{1}{x}}.$$

13. 证明 $|3x - x^2| \leq 2 \quad (|x| \leq 2)$.

14. 以长方形内接于抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 及 $x = h \quad (h > 0)$ 所围图形内, 问面积最大时, 长方形宽是多少?

第4章 不定积分

习题A

一、选择题.

- $\int \cos 2x dx$ 等于 ().
A. $\sin 2x + C$ B. $2 \sin 2x + C$ C. $\frac{1}{2} \sin 2x + C$ D. $-\frac{1}{2} \sin 2x + C$
- $\int (e^x - e^{-x}) dx$ 等于 ().
A. $e^x + e^{-x} + C$ B. $e^x - e^{-x} + C$
C. $\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} + C$ D. $\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} + C$
- $\int e^{x+1} dx$ 的值为 ().
A. $e^x + C$ B. $e^{x+1} + C$ C. $2e^{x+1} + C$ D. $2e^x + C$
- $\int \frac{x^2 - 4}{x - 2} dx$ 的值为 ().
A. $x^2 + C$ B. $x^2 + 2x + C$
C. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + C$ D. $\frac{1}{2}x^2 + x + C$
- $\int \sqrt{\frac{1}{x}} dx$ 的值为 ().
A. $x^{\frac{1}{2}} + C$ B. $2x + C$ C. $2x^{\frac{1}{2}} + C$ D. $x + C$
- $\int \cos(3x + 6) dx$ 的值为 ().
A. $\frac{1}{3} \sin(3x + 6) + C$ B. $\sin(3x + 6) + C$
C. $\cos(3x + 6) + C$ D. $\frac{1}{3} \cos(3x + 6) + C$
- 若函数 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 ().
A. $1 + \sin x$ B. $1 - \sin x$ C. $1 + \cos x$ D. $1 - \cos x$
- 函数 $\cos \frac{\pi}{2} x$ 的一个原函数是 ().
A. $\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2}$ B. $-\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2}$ C. $\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2}$ D. $-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2}$

9. 设 $f(x) = e^{-x}$, 则 $\int \frac{f(\ln x)}{x} dx = (\quad)$.
- A. $\frac{1}{x} + C$ B. $\ln x + C$ C. $-\frac{1}{x} + C$ D. $-\ln x + C$
10. 下列各组函数为同一函数的原函数是 (\quad).
- A. $F_1(x) = x^3$ 与 $F_2(x) = 4 - x^3$
- B. $F_1(x) = x^3$ 与 $F_2(x) = 4 - \frac{1}{2}x^3$
- C. $F_1(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$ 与 $F_2(x) = c - \frac{1}{4}\cos 2x$
- D. $F_1(x) = \ln x$ 与 $F_2(x) = \ln x^2$
11. 设 $f(x) = e^{-x^5}$, 则 $\int f'(x) dx = (\quad)$.
- A. $-\frac{1}{2}e^{-x^5} + C$ B. $e^{-x^5} + C$ C. $\frac{1}{2}e^{-x^5} + C$ D. $-2e^{-x^5} + C$
12. $F'(x) = f(x)$, 则 $\int df(x) = (\quad)$.
- A. $f(x)$ B. $F(x)$ C. $f(x) + C$ D. $F(x) + C$
13. 下列各组函数为同一函数的原函数是 (\quad).
- A. $F_1(x) = x^2$ 与 $F_2(x) = 4 - x^2$
- B. $F_1(x) = x^4$ 与 $F_2(x) = 4 - \frac{1}{2}x^4$
- C. $F_1(x) = \sin x + 1$ 与 $F_2(x) = \sin x + 2$
- D. $F_1(x) = \ln x$ 与 $F_2(x) = \ln x^2$
14. $\int \tan x dx$ 的值为 (\quad).
- A. $\ln |\cos x|$ B. $-\ln |\cos x| + C$
- C. $\ln \cos x + C$ D. $\ln |\cos x| + C$
15. 函数 $\sin \frac{\pi}{2}x$ 的一个原函数是 (\quad).
- A. $\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2}$ B. $-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2}$ C. $\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$ D. $-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$
16. 若 $\int f(x) dx = 2 \cos \frac{x}{2} + c$, 则 $f(x) = (\quad)$.
- A. $-\sin \frac{x}{2}$ B. $\cos \frac{x}{2} + C$ C. $c + \sin x$ D. $1 - \cos x$
17. 函数 x^3 的一个原函数是 (\quad).
- A. $\frac{1}{4}x^4 + 1$ B. $\frac{1}{3}x^2$ C. x^4 D. x^2
18. 设 $\ln x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f'(x) = (\quad)$.
- A. $\frac{1}{x}$ B. $-\frac{1}{x^2}$ C. $\frac{1}{2}x + C$ D. $x + C$

19. $\int \sin^2 x \cos x dx$ 的值为 ().

- A. $\sin^3 x + C$ B. $\cos x^3 + C$ C. $\frac{1}{3} \sin^3 x + C$ D. $\frac{1}{2} \cos^2 x + C$

20. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$ 的值为 ().

- A. $\ln |1+e^x|$ B. $-\ln(1+e^x) + c$
C. $\ln(1+e^x) + C$ D. $\ln e^x + C$

二、填空题.

1. $\int \frac{1}{(2x+3)^9} dx =$ _____.

2. 设 $e^{\frac{x}{2}}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f'(x) =$ _____.

3. $\int \frac{1}{x \ln x} dx =$ _____.

4. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx =$ _____.

5. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $-\cos x$, 则 $\int \cos^3 x f'(x) dx =$ _____.

6. $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$ _____.

7. $\int x \cos x dx =$ _____.

8. $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx =$ _____.

9. $\int 2xe^{x^2} dx =$ _____.

10. $\int \frac{\ln^3 |x|}{x} dx =$ _____.

三、计算题.

1. 求 $\left(3e^x - 2x^2\sqrt{x} + 4 + \frac{2}{x} \right) dx$ 的值.

2. 求 $\int x \arctan x dx$ 的值.

3. 求 $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$ 的值.

4. 求 $\int \frac{1-x^3+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx$ 的值.

5. 求 $\int \frac{1-x+x^2}{x(1+x^2)} dx$ 的值.

6. 求 $\int e^{ax} \cdot a^x dx$ 的值.

7. 求 $\int \cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{7}{4}\right) dx$ 的值.

8. 求 $\int (2x-3)^{10} dx$ 的值.

9. 求 $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ 的值.

10. 求 $\int \frac{\sqrt{1+2\ln x}}{x} dx$ 的值.

11. 求 $\int \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{x+1}{x}\right) dx$ 的值.

12. 求 $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$ 的值.

13. 求 $\int \frac{2x+3}{x^2-3x+3} dx$ 的值.

14. 求 $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ 的值.

15. 求 $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx$ 的值.

16. 求 $\int x^2 e^{-2x} dx$ 的值.

17. 求 $\int x \sin(3x-2) dx$ 的值.

18. 求 $\int x \ln(x-1)$ 的值.

19. 求 $\int (\ln x)^2 dx$ 的值.

20. 求 $\int x \arctan x dx$ 的值.

21. 求 $\int x \tan^2 x dx$ 的值.

22. 求 $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x}$ 的值.

23. 求 $\int x \sin x \cos x dx$ 的值.

24. 求 $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ 的值.

25. 求 $\int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x dx$ 的值.

四、证明题.

$$1. \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C. \quad (\text{提示: } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2})$$

$$2. \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$3. \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln(1+e^x) + C.$$

五、已知 $f(x)$ 的一个原函数是 xe^{-x} ，求

$$(1) \int f(x) dx;$$

$$(2) \int xf'(x) dx;$$

$$(3) \int xf(x) dx.$$

习题B

一、选择题.

1. 下列值为 $\ln|\sin x| + c$ 的项为 ().

A. $\int \cot x dx$ B. $\int \tan x dx$ C. $\int \sin x dx$ D. $\int \cos x dx$

2. $\int x e^{-x^2} dx$ 的值为 ().

A. $e^{-x^2} + C$ B. $-e^{-x^2} + C$ C. $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$ D. $\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

3. $\int \frac{1}{2x} dx$ 的值为 ().

A. $\frac{1}{2} \ln 2x + C$ B. $\ln 2x + C$ C. $\frac{1}{2} \ln x + C$ D. $\frac{1}{2} \ln|x| + C$

4. $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx$ 的值为 ().

A. $\sin \frac{1}{x} + C$ B. $\cos x + C$ C. $\cos \frac{1}{x} + C$ D. $-\sin \frac{1}{x} + C$

5. $\int \sin^3 x \cos x dx$ 的值为 ().

A. $\sin^4 x + C$ B. $\frac{\sin^4}{4} + C$ C. $\cos^4 x + C$ D. $\frac{\cos^4 x}{4} + C$

6. $\int \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx$ 的值为 ().

A. $x^3 + 2x^2 + x + C$ B. $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + x + C$
C. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$ D. $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C$

7. 若 $\int f(x) dx = 2 \sin \frac{x}{2} + C$, 则 $f(x) =$ ().

A. $\cos \frac{x}{2} + C$ B. $\cos \frac{x}{2}$ C. $1 + \cos x$ D. $1 - \cos x$

8. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2} , 则 $\int x f'(x) dx =$ ().

A. $-2x^2 e^{-x^2} + C$ B. $2x^2 e^{-x^2} + C$
C. $e^{-x^2} (-2x^2 - 1) + C$ D. $xf(x) - \int f(x) dx$

9. 设 $f(x) = x e^{-x^2}$, 则 $\int f'(x) dx =$ ().

A. $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$ B. $x e^{-x^2} + C$ C. $\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$ D. $-2e^{-x^2} + C$

10. 下列各式正确的是 ().

- A. $\int \frac{1}{1+e^x} dx = \ln(1+e^x) + C$ B. $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{x} d\frac{1}{x}$
 C. $\int \frac{-x}{\sin^2 x} dx = \int x d\frac{1}{\sin x}$ D. $\int \frac{1}{1-x} dx = -\int \frac{1}{1-x} d(1-x)$
11. 如果一个函数有原函数, 则有 ().
 A. 一个 B. 两个 C. 无穷个 D. 都不对
12. 若 u, v 都为 x 的可微函数, 则 $\int u dv = ()$.
 A. $uv - \int v du$ B. $uv - \int u' v du$ C. $uv - \int v' du$ D. $uv - \int uv' du$
13. 下列各式错误的是 ().
 A. $\int \frac{1}{1+e^x} dx = \ln(1+e^x) + C$ B. $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln |\ln x| + C$
 C. $\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$ D. $\int \frac{1}{1-x} dx = -\int \frac{1}{1-x} d(1-x)$
14. 设 $f(x) = \frac{\sin x}{1+\sin x}$, 则 $\int f'(x) dx = ()$.
 A. $\frac{1}{1+\sin x} + C$ B. $\sin x + C$ C. $\cos x + C$ D. $\frac{\sin x}{1+\sin x} + C$
15. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin x$, 则 $\int x f'(x) dx = ()$.
 A. $x \sin x + C$ B. $x \cos x - \sin x + C$
 C. $x + \sin x + C$ D. $\cos x + C$
16. 若 $\int f(x) dx = \sin x + C$, 则 $f(x) = ()$.
 A. $-\cos x + C$ B. $\cos \frac{x}{2} + C$ C. $C + \sin x$ D. $\cos x$
17. $\int \sin x \cos x dx$ 的值为 ().
 A. $\frac{1}{2} \sin^2 x + C$ B. $\frac{1}{2} \cos^2 x + C$ C. $\frac{1}{2} \sin x + C$ D. $\frac{1}{2} \cos x + C$
18. $\int e^{2x+5} dx$ 的值为 ().
 A. $e^{2x+5} + C$ B. $\frac{1}{2} e^{2x+5} + C$ C. $2e^{2x+5} + C$ D. $5e^{2x+5} + C$
19. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ 的值为 ().
 A. $\ln |f(x)|$ B. $-\ln |f(x)|$ C. $\ln f(x) + C$ D. $\ln |f(x)| + C$
20. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{1}{x}$, 则 $\int x f'(x) dx = ()$.
 A. $\ln |x| + C$ B. $-\ln |x| + C$ C. $\ln \left| \frac{1}{x} \right| + C$ D. $-\ln \left| \frac{1}{x} \right| + C$

二、填空题.

1. $\int \sqrt{1-3x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. $\int x e^{2x^2+5} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
3. 设 $f(x) = \frac{1}{x-3}$, 则 $\int f'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
4. $\int e^x \sin x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{2-3x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
6. 设 $f(x) = e^{-x}$, 则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
7. $x \ln x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
8. $\int \left(\frac{1}{x} - x \right) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
9. $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
10. 函数 $\tan x$ 的原函数是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、计算题.

求下列不定积分.

1. $\int \left(x^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{2} \right) dx.$

2. $\int (x^2 + 1)^2 dx.$

$$3. \int (\sqrt{x} + 1)(x - 1) dx .$$

$$4. \int (2 - \sec^2 x) dx .$$

$$5. \int \left(3^x - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx .$$

$$6. \int \sqrt{1-2x} dx .$$

7. $\int e^{3x+2} dx.$

8. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$

9. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$

10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$

$$11. \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} dx .$$

$$12. \int x e^{-x^2} dx .$$

$$13. \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx .$$

$$14. \int \frac{dx}{9+4x^2} .$$

$$15. \int \frac{dx}{x^2 + x - 2}.$$

$$16. \int \frac{2x+1}{x^2 + x + 2} dx.$$

$$17. \int \sin 3x \sin 5x dx.$$

$$18. \int \tan^3 x dx.$$

19. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx .$

20. $\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx .$

21. $\int x \cos x dx .$

22. $\int \ln x dx .$

$$23. \int x e^{-x} dx .$$

$$24. \int x \ln(x^2 + 1) dx .$$

$$25. \int x \arcsin x dx .$$

四、证明题.

$$1. \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c .$$

$$2. \int \frac{x^3 - 27}{x - 3} dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 9x + C .$$

第5章 定积分及其应用

习题A

一、选择题.

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是 ().
A. $f(x)$ 的一个原函数
B. 任意常数
C. $f(x)$ 的全体原函数
D. 确定常数
- $\frac{d}{dx} \int_a^b \arctan x dx =$ ().
A. $\arctan x$
B. $\frac{1}{1+x^2}$
C. $\arctan b - \arctan a$
D. 0
- $\int_0^a f(x)dx =$ ().
A. $\int_0^{\frac{a}{2}} [f(x) + f(x-a)]dx$
B. $\int_0^{\frac{a}{2}} [f(x) + f(a-x)]dx$
C. $\int_0^{\frac{a}{2}} [f(x) - f(a-x)]dx$
D. $\int_0^{\frac{a}{2}} [f(x) - f(x-a)]dx$
- 设 $I_1 = \int_1^2 e^x dx$, $I_2 = \int_1^2 e^{2x} dx$, 则一定有 ().
A. $I_1 > I_2$
B. $I_1 = I_2$
C. $I_1 < I_2$
D. 无法比较大小
- $\frac{d}{dx} \int_a^b x^2 dx =$ ().
A. x^2
B. $\frac{1}{3}x^2$
C. $2x$
D. 0
- 若 $\int_0^1 (3x^2 + k)dx = 3$, 则 $k =$ ().
A. 0
B. 1
C. 2
D. -1
- $\int_0^3 |x-2|dx =$ ().
A. $\int_0^3 (x-2)dx$
B. $-\int_0^3 (x-2)dx$
C. $-\int_0^2 (x-2)dx + \int_2^3 (x-2)dx$
D. 无法计算
- 设函数 $f(x) = \int_0^x (1-t)(t+2)dt$, 则 $f(-2) =$ ().

- A. 0 B. 10 C. 2 D. -10
9. 设函数 $\Phi(x) = \int_0^{x^2} te^{-t} dt$, 则 $\Phi'(x) =$ ().
- A. xe^{-x} B. $-xe^{-x}$ C. $2x^3e^{-x^2}$ D. $-2x^3e^{-x^2}$
10. $\int_{-\infty}^0 x dx =$ ().
- A. 发散 B. 0 C. 1 D. $\frac{1}{2}$
11. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx =$ ().
- A. 0 B. 1 C. 2 D. -2
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t dt}{x^2} =$ ().
- A. 1 B. 0 C. ∞ D. $\frac{1}{2}$
13. $\int_0^2 |x-1| dx =$ ().
- A. $\left| \frac{x-1}{2} \right| \Big|_0^2$ B. $\int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx$
- C. 0 D. $\int_0^1 (x-1) dx + \int_1^2 (1-x) dx$

二、填空题.

1. $y = 2x^2 + 3x + 3$ 在 $[1, 4]$ 上的平均值为_____.
2. 如果 $\int_k^2 3x^2 dx = 7$, 则 $k =$ _____.
3. 由曲线 $y = x^2$, 直线 $y = 2x + 3$ 围成的平面图形的面积为_____.
4. $F(x) = \int_0^x \cos t^2 dt$, 则 $F'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ _____.
5. 若对任意的 a 均有 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$, 则 $f(x)$ 是_____.
6. 定积分 $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$, 在计算时应做的变换是_____.
7. $\int_{-1}^1 x \cos x dx =$ _____.
8. $\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \ln \frac{1+x}{1-x} dx =$ _____.
9. $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} (\sin x + 1) dx =$ _____.
10. 设 $F(x) = \int_1^x \tan t dt$, 则 $F'(x) =$ _____.
11. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx =$ _____.

$$12. \int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$13. \text{ 若 } \int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+g(x)} dx = 1, \text{ 则 } \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)+g(x)} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$14. \int_a^b [f'(x) + 2] dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$15. \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

三、计算题.

$$1. \text{ 求 } \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx.$$

$$2. \text{ 求 } \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

$$3. \text{ 求 } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

4. 求 $\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2} dx$.

5. 求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

6. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$.

7. 求 $\int_0^1 a^x e^x dx$.

8. 求 $\int_0^3 \frac{x dx}{1 + \sqrt{1+x}}$.

9. 求 $\int_1^8 \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}} dx$.

10. 求 $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1+8\ln x}} dx$.

11. 求 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$.

12. 求 $\int_0^1 x \cos \pi x dx$.

13. 求 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arccos x dx$.

14. 求 $\int_0^1 x \arctan x dx$.

15. 求 $\int_0^1 x^2 e^{\frac{x}{2}} dx$.

16. 求 $\int_0^1 x e^x dx$.

17. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - \sin x| dx$.

18. $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$.

19. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

20. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(1-2x)^{\frac{3}{2}}} dx.$

21. 设 $f(x) = \int_1^{x^2} xtdt$, 求 $f'(x)$.

22. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_1^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt = e^{-x} - e^{-\frac{1}{2}}$, 求定积分 $\int_0^1 f(x) dx$.

四、应用题.

1. 求由直线 $x=0$, $x=2$, $y=0$ 与抛物线 $y=-x^2+1$ 所围成的平面图形的面积 S 及上述平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V_x .

2. 求由直线 $y = 0$, $x = e$ 及曲线 $y = \ln x$ 所围成平面图形的面积.

3. 求由直线 $y = x$, $y = 2x$ 及 $y = 2$ 所围平面图形的面积.

习题B

一、选择题.

1. $\int_{\frac{1}{2}}^2 |\ln x| dx = (\quad).$

A. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x dx + \int_1^2 \ln x dx$

B. $-\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x dx + \int_1^2 \ln x dx$

C. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x dx - \int_1^2 \ln x dx$

D. $-\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x dx - \int_1^2 \ln x dx$

2. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = (\quad).$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{2}$

D. -1

3. 由直线 $y=2x+1$, $x=0$, $x=1$ 及 x 轴围成区域的面积为 $(\quad).$

A. $\int_0^1 -(2x+1) dx$

B. $\int_0^1 (2x+1) dx$

C. $\int_1^0 (2x+1) dx$

D. $\int_0^1 (2x+1)^2 dx$

4. 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续是 $\int_a^b f(x) dx$ 存在的 $(\quad).$

A. 充要条件

B. 必要条件

C. 充分条件

D. 以上结论都不对

5. 若 $\int_0^x f(t) dt = e^{2x}$, 则 $f(x) = (\quad).$

A. $2e^{2x}$

B. e^{2x}

C. $2xe^{2x}$

D. $2xe^{2x-1}$

6. 设 $f(x)$ 连续, $F(x) = \int_{x^2}^{e^x} f(t) dt$, 则 $F'(0) = (\quad).$

A. $f(1) - f(0)$

B. $f'(1) - f'(0)$

C. $f(1)$

D. $F(0)$

7. $\int_0^{\frac{1}{2}} e^x dx$ 与 $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{x^2} dx$ 相比, 有关系式 $(\quad).$

A. $\int_0^{\frac{1}{2}} e^x dx > \int_0^{\frac{1}{2}} e^{x^2} dx$

B. $\int_0^{\frac{1}{2}} e^x dx < \int_0^{\frac{1}{2}} e^{x^2} dx$

C. $\int_0^{\frac{1}{2}} e^x dx = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{x^2} dx$

D. 两个积分值不能比较

8. 若 $\int_0^1 (2x+k) dx = 2$, 则 $k = (\quad).$

A. 0

B. 1

C. 2

D. -1

9. $\frac{d}{dx} \int_0^x \sin^2 t dt = (\quad).$

A. $\cos^2 x$

B. $\sin^2 x$

C. $2x \sin^2 x$

D. $2 \sin x \cos x$

10. $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int_0^{\sin x} f(t)dt = x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$ ().

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 0 D. $\sqrt{2}$

11. 设 $f(x) = \int_x^0 te^{-t^2} dt$, 则 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值为 ().

- A. $\frac{1}{2}(e^{-1} - 1)$ B. $\frac{1}{2}(e^{-4} - 1)$ C. $e^{-1} - 1$ D. $(e^{-4} - 1)$

12. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $\int_{-1}^1 f(x)dx =$ ().

- A. $2 \int_{-1}^0 xdx$ B. $2 \int_0^1 x^2 dx$
C. $\int_0^1 x^2 dx + \int_{-1}^0 xdx$ D. $\int_0^1 xdx + \int_{-1}^0 x^2 dx$

二、填空题.

1. $\frac{d}{dx} \int_x^b (\sin t)^2 dt =$ _____.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2, & x > 1 \end{cases}$, 则 $\int_0^2 f(x)dx =$ _____.

3. 已知 $f(0) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(2) = 4$, 则 $\int_0^2 xf''(x)dx =$ _____.

4. $x = \int_0^t \sin u du$, $y = \int_0^t \cos u du$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

5. $\int_0^x (2e^t - e^{-t})dt$ 的驻点是_____.

6. 设 $y = \int_0^x (1-t)dt$ 有极值, 则极值点是_____.

7. 若 $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\sin x + f(x)]dx$ 中 $f(x)$ 是奇函数, 则 $I =$ _____.

8. $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx =$ _____.

9. $\frac{d}{dx} \left(\int_0^2 \sin x^2 dx \right) =$ _____.

10. 设 $F(x) = \int_1^{x^2} \tan t dt$, 则 $F'(x) =$ _____.

11. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx =$ _____.

12. 设 $f(x)$ 为连续函数, 则 $\int_{-a}^a x^2 [f(x) - f(-x)]dx =$ _____.

13. 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的_____条件, 而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的_____条件.

14. $\int_{-1}^1 (1 - \sin^3 x) \frac{1}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^b \ln(1+t) dt = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、计算题.

1. 求 $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$.

2. 求 $\int_0^3 |2-x| dx$.

3. 求 $\int_{-1}^2 f(x) dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 2] \\ x^2, & x \in [-1, 0] \end{cases}.$

4. 求 $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x dx$.

5. 求 $\int_1^3 \frac{1+\ln x}{x} dx$.

6. 求 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$.

7. 求 $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx (a > 0)$.

8. 求 $\int_1^{\ln 2} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$.

9. 求 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx$.

10. 求 $\int_0^1 x \ln(1+x^2) dx$.

11. 求 $\int_1^{e^{\frac{1}{3}}} \frac{\ln x}{x^3} dx$.

12. 求 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$.

13. 求 $\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx$.

14. 求 $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$.

15. 已知 xe^x 为 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int_0^1 xf'(x) dx$.

16. 求 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

17. 求 $\int_1^5 \frac{\sqrt{t-1}}{t} dt$.

18. $\int_{-1}^2 \frac{x}{x+3} dx$.

19. $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$.

20. $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3} dx.$

21. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 1 \\ e^{-x}, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 求 $\int_0^{\frac{3}{2}} f(x) dx.$

22. 求 $\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx.$

四、应用题.

1. 求由直线 $y=2x$, $y=x$, $x=2$, $x=4$ 所围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

2. 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x$ 所围平面图形的面积.

3. 求由曲线 $y = \ln x$ 及直线 $y = \ln a$, $y = \ln b (b > a > 0)$, $x = 0$ 所围平面图形的面积.

4. 计算由曲线 $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, y 轴所围成的平面图形经 y 轴旋转所生成立体的体积.

五、求函数 $f(x) = \int_0^x te^{-t} dx$ 的极值与拐点.

六、证明题.

设 $f(x)$ 为 $[-a, a]$ 上的连续函数, 证明

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ 是 $[-a, a]$ 上的奇函数.

(2) 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ 是 $[-a, a]$ 上的偶函数.

第6章 多元函数微积分

习题A

一、选择题.

1. 二元函数 $z = \frac{1}{\sqrt{4y - x^2 - y^2}}$ 的定义域是 ().
A. $(x-2)^2 + y^2 < 2$ B. $(x-2)^2 + y^2 < 4$
C. $(x-2)^2 + y^2 < 2$ D. $x^2 + (y-2)^2 < 4$
2. 函数 $z = e^{xy}$, 则 $dz =$ ().
A. $ye^{xy}dx$ B. $xe^{xy}dx$ C. $e^{xy}dx + e^{xy}dy$ D. $e^{xy}(ydx + xdy)$
3. 已知方程 $e^z - xyz = 0$ 确定的隐函数 $z = z(x, y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ ().
A. $\frac{z}{1+z}$ B. $\frac{z}{x(1-z)}$ C. $\frac{y}{x(1+y)}$ D. $\frac{y}{x(1-z)}$
4. 设 $D: x^2 + y^2 \leq a^2$, 要使 $\iint_D adxdy = 2a^2$, 则 $a =$ ().
A. 2 B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{1}{\pi}$ D. $\frac{2}{\pi}$
5. 设 $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$, 则 $f(x, y) =$ ().
A. $x^2 + y^2$ B. $x^2 \frac{1+y}{1-y}$ C. $x^2 \frac{1-y}{1+y}$ D. $y^2 \frac{1-x}{1+x}$
6. 函数 $z = \ln(4 - x^2 - y^2) - \frac{x+y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ 的定义域是 ().
A. $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 4, x^2 + y^2 \geq 1\}$ B. $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 > 1\}$
C. $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 4, x^2 + y^2 > 1\}$ D. $\{(x, y) | x + y < 4, x + y > 1\}$
7. 设 $f(x, y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$, 则 $f'_x(x, 1) =$ ().
A. x B. 1 C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
8. 设 $z = x^{\ln y}$, $dz\Big|_{(e, e^2)} =$ ().

- A. $zedx - dy$ B. $edx + zedy$ C. $edx + dy$ D. $zedx + dy$
9. 设 $u = e^x \sin y$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (\quad)$.
- A. $e^x \cos y$ B. $e^x \sin y$ C. $-e^x \cos y$ D. $-e^x \sin y$
10. 函数 $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2x + 6y + 2$ 的驻点为 (\quad) .
- A. $(-1, -1)$ B. $(-1, 1)$ C. $(1, 1)$ D. $(1, -1)$
11. 设 D 是平面区域 $\{a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$, 其中 $\{0 < a < b\}$, 则 $\iint_D dx dy = (\quad)$.
- A. $a^2 + b^2$ B. a^π C. $(b^2 - a^2)\pi$ D. $b^2\pi$
12. 设 D 由 $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ 围成, 则重积分 $\iint_D x^2 dx dy = (\quad)$.
- A. 1 B. -1 C. 2 D. 0
13. 设 $f'(u)$ 存在, $z = f[\sin(xy)]$, 则 $y \frac{\partial z}{\partial y} - x \frac{\partial z}{\partial x} = (\quad)$.
- A. $(x + y)\cos(xy)f'[\sin(xy)]$ B. $(x - y)\cos(xy)f'[\sin(xy)]$
C. $2xy\cos(xy)f'[\sin(xy)]$ D. 0
14. 设 D_1 表示以 $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(2, 0)$ 为顶点的三角形; D_2 表示以 $O(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, -1)$ 为顶点的三角形; D 为区域 D_1 、 D_2 的并集, 即 $D = D_1 + D_2$, 则二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy = (\quad)$.
- A. 0 B. $2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy$
C. $2 \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$ D. $\iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$
15. 函数 $f(x, y) = 5x^2 y^3$, 则 $f'_x(0, 0) = (\quad)$.
- A. 0 B. 5 C. 1 D. 10
16. 函数 $z = \arcsin \frac{x^2 + y^2}{4}$ 的定义域 (\quad) .
- A. $x^2 + y^2 \leq 4$ B. $x^2 + y^2 < 2$ C. $x^2 + y^2 > 4$ D. 任意实数
17. 设 $z = (1 + 3x)^{2y}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = (\quad)$.
- A. $2y(1 + 3x)^{2y-1}$ B. $6y(1 + 3x)^{2y-1}$
C. $(1 + 3x)^{2y} \ln(1 + 3x)$ D. $6y(1 + 3x)^{2y}$
18. 设 $z = \ln(xy)$, 则 $dz = (\quad)$.
- A. $\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy$ B. $x dx + y dy$ C. $\frac{1}{y} dx + \frac{1}{x} dy$ D. $y dx + x dy$
19. 设 D 是环形区域: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, 则 $\iint_D d\sigma = (\quad)$.
- A. 3π B. 2π C. π D. π^2

二、填空题.

1. $z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

2. $z = 3x^2 + y^2$, $x = \sin t$, $y = 3t$, 则 $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=\frac{\pi}{2}} =$ _____.

3. 设 $D: y = 1 - x^2$, $y = 0$ 所围成, 则 $\iint_D x d\sigma =$ _____.

4. 设 $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{1 - y^2}$, 则 z 的定义域为 _____.

5. 设 $D: 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$ 所围成的区域, 则 $\iint_D xy dx dy =$ _____.

6. 若 $z = \ln x^2 + e^{xy}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

7. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的定义域是 _____.

8. $z = \ln(2x + 3y) + 4 \arccos(5x^2 + 6y^2)$ 的定义域是 _____.

9. 设 $z = x^y$, ($x > 0, x \neq 1$), 求 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

10. 设 $z = x \sin y$, 则 $dz =$ _____.

三、计算题.

1. $z = xy + \frac{x}{y}$, 求它的全微分.

2. 设 $z = \arctan \frac{x}{y}$, 其中 $x = u + v, y = u - v$, 求 $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$.

3. 计算二重积分 $\iint_D (x^3 + 3x^2y + y^2) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

4. 求 $\iint_D \cos(x+y) dx dy$, 其中 D 是由 $x=0$, $y=\pi$, $y=x$ 围成.

5. 计算 $\iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma$, 其中 D 是由双曲线 $xy=1$, 直线 $x=2$ 和 $y=x$ 围成.

6. 设 $z = x + y + f(x-y)$, 若当 $y=0$ 时 $z = \sin x$, 求函数 z .

7. 设 $f(x, y) = (x-1)\arctan\sqrt{\frac{x}{y}}$, 求 $f'_x(x, y)|_{(1,1)}$.

8. 设 $z = xy^2$, 在 (1,1) 点求出函数 z 关于增量 $\Delta x, \Delta y$ 的全增量 Δz 及全微分 dz .

9. 已知 $z = \arctan \frac{x}{y}$, 其中 $x = u + v$, $y = u - v$

证明: $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}$.

10. 证明:

$$\int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx.$$

习题B

一、选择题.

- 满足 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$ 的函数 z 是 ().
 A. $z = \frac{xy}{4}$ B. $z = \frac{1}{4xy}$ C. $z = \ln\sqrt{xy}$ D. $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$
- 设 $D: x^2 + y^2 \leq 4 (y \geq 0)$, 则 $\iint_D dx dy =$ ().
 A. 16π B. 4π C. 2π D. 8π
- 设 $z = \ln(x^2 + y^2)$, $y = 2x^2$, 则 $\frac{dz}{dx} =$ ().
 A. $\frac{2x}{x+y^2}$ B. $\frac{2x}{x^2+4x^4}$ C. $\frac{4x^3}{x^2+4x^4}$ D. $\frac{2x+16x^3}{x^2+4x^4}$
- 已知 $D: 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$, 则 $\iint_D xy^2 d\sigma =$ ().
 A. 0 B. $\frac{1}{6}$ C. 1 D. $\frac{1}{3}$
- 设函数 $z = |xy - 1| + \frac{y-2}{x}$, 则 $z\left(2, \frac{1}{4}\right) =$ ().
 A. 2 B. $-\frac{7}{2}$ C. $-\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{2}$
- 设 $u = \sqrt{xy}$, 则 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,4)} =$ ().
 A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 0 D. -1
- 设 $u = e^{xyz}$, 则 $du =$ ().
 A. $yz e^{xyz} dx$ B. $xz e^{xyz} dy$
 C. $xz e^{xyz} dz$ D. $e^{xyz}(yz dx + xz dy + xy dz)$
- 设 $z = 3x^2 - xy + 2y^2$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ ().
 A. 6 B. -1 C. 3 D. 2
- 设 $y = f(x)$ 是由方程 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 所确定的隐函数, 则 $\frac{dy}{dx} =$ ().
 A. $\frac{y}{x}$ B. $-\frac{x}{y}$ C. $2x$ D. $\frac{y^2}{2}$
- 函数 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处 ().
 A. 偏导数存在 B. 是驻点
 C. 有极小值 D. 有极大值

11. 设 D 是由 x 轴, y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成, 则下列不等式成立的是 ().

- A. $\iint_D (x+y)^2 dx dy > \iint_D (x+y)^3 dx dy$ B. $\iint_D (x+y)^2 dx dy \geq \iint_D (x+y)^3 dx dy$
 C. $\iint_D (x+y)^2 dx dy < \iint_D (x+y)^3 dx dy$ D. $\iint_D (x+y)^2 dx dy \leq \iint_D (x+y)^3 dx dy$

12. 函数 $z = \ln(1+x+y-xy)$, 则 $dz|_{(1,1)} =$ ().

- A. 0 B. dx
 C. $\frac{dx}{1+x+y-xy}$ D. $\frac{2(dx+dy)}{1+x+y-xy}$

13. 函数 $z = \ln(2x+3y-1)$ 的定义域图形为 ().

- A. 一点 B. 有限个点 C. 一条直线 D. 半平面

14. 二重积分 $\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y) dx$ 交换积分次序后为 ().

- A. $\int_0^y dx \int_0^1 f(x,y) dy$ B. $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x,y) dy$
 C. $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y) dy$ D. $\int_0^1 dx \int_0^y f(x,y) dy$

15. 设 $z = f(-\frac{y}{x})$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ ().

- A. $f'(-\frac{y}{x})$ B. $\frac{y}{x^2} f'(-\frac{y}{x})$ C. $\frac{1}{x} f'(-\frac{y}{x})$ D. $-y \ln x f'(-\frac{y}{x})$

16. 函数 $z = 2x^2 y^3$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} =$ ().

- A. 0 B. 2 C. 1 D. 4

17. 设 $xy - yz = 0$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ ().

- A. -1 B. 1 C. 0 D. $\frac{z-x}{y}$

18. 二次积分 $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y) dy =$ ().

- A. $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y) dx$ B. $\int_0^1 dy \int_0^{1-x} f(x,y) dx$
 C. $\int_0^{1-x} dy \int_0^1 f(x,y) dx$ D. $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y) dx$

二、填空题.

1. 设 $z = e^{u-2v}$, $u = \sin x$, $v = e^x$, 则 $\frac{dz}{dx} =$ _____.

2. $z = \ln(1-x^2-y^2)$ 在 $x=2$, $y=1$ 处的全微分为_____.

3. 改变积分 $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y) dx$ 的次序为_____.

4. 设 $z = x^2 y^2 + 3x$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

5. $I = \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx$ 交换次序所成的二重积分是_____.

6. 若 $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

7. $z = \ln(x+y)$ 的定义域是_____.

8. 设 $z = x^2 \sin^2 y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

9. 设 $z = \ln \sin(x-2y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

10. 设 $z = \ln(\sin 2xy)$, 求 $dz =$ _____.

三、计算题.

1. 设 $z = uv + \sin t$, $u = e^t$, $v = \cos t$, 求 $\frac{\partial z}{\partial t}$.

2. 计算 $I = \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$, D 是由直线 $y = x$, $y = x+1$, $x = 0$ 及 $x = 2$ 围成.

3. 计算 $\iint_D x dx dy$, D 是由 $x = \sqrt{y-1}$, $y = 3-x$ 及 $x = 0$ 围成.

4. 将 $I = \iint_D f(x, y) d\sigma$ 化为二次积分, 其中 D 是由 $y = 3 - x$, $y = \frac{x^2}{4}$ 围成.

5. 计算二重积分 $I = \iint_D xy d\sigma$, 其中区域 D 为 $ax \leq x^2 + y^2 \leq a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, ($a > 0$).

6. 求 $I = \int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$.

7. 求 $y = x^3 - 3x^2 - 1$ 的单调区间、极值、曲线的凸凹区间及拐点.

8. 已知函数 $f(x)$ 连续且满足等式 $\int_0^x (x-t)f(t)dt = 1 - \cos x$, 证明 $\int_0^{\frac{x}{2}} f(x)dx = 1$.

9. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $x\cos x$, 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$.

10. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \cos t^2 dt}{x-1}$.

11. 设 $F(x) = \int_0^x du \int_0^u t \cos(t-u)dt$, 求 $F''(x)$.

12. 已知 $f(x) = 3x^2 + \int_0^2 f(x)dx$, 试求 $\int_0^2 f(x)dx$ 的值.

13. 证明: $\int_0^a x^m (a-x)^n dx = \int_0^a (a-x)^m x^n dx$.

第7章 常微分方程

习题A

一、选择题.

1. 方程 $x + y - 2 + (1 - x)y' = 0$ 是 ().
A. 可分离变量的微分方程 B. 一阶齐次微分方程
C. 一阶齐次线性微分方程 D. 一阶非齐次线性微分方程
2. 给定一阶微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$, 下列结果正确的是 ().
A. 通解为 $y = Cx^2$
B. 通过点 $(1, 4)$ 的特解是 $y = x^2 - 15$
C. 满足 $\int_0^1 y dx = 2$ 的解为 $y = x^2 + \frac{5}{3}$
D. 与直线 $y = 2x + 3$ 相切的解为 $y = x^2 + 1$
3. 若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是某个二阶齐次线性微分方程的解, 则 $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ (C_1, C_2 为任意实数) 必是该方程的 ().
A. 通解 B. 特解 C. 解 D. 全部解
4. 微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解是 ().
A. $y = x^2 e^x$ B. $y = e^x$ C. $y = x^3 e^x$ D. $y = e^{-x}$
5. 微分方程 $y \ln x dx = x \ln y dy$ 满足 $y(1) = 1$ 的特解是 ().
A. $\ln^2 x + \ln^2 y = 0$ B. $\ln^2 x + \ln^2 y = 1$
C. $\ln^2 x = \ln^2 y$ D. $\ln^2 x = \ln^2 y + 1$
6. 下列函数中, () 是微分方程 $y'' - 7y' + 12y = 0$ 的解.
A. $y = x^3$ B. $y = x^2$ C. $y = e^{3x}$ D. $y = e^{2x}$
7. 具有特定解形式为 $y = ax + b + Be^x$ 的微分方程是 ().
A. $y'' + y' - 2y = 2x + e^x$ B. $y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x$
C. $y'' - 2y' + y = x + e^x$ D. $y'' - 2y' = x + 2e^x$
8. $y'' - 4y'x + 4y = 6x^2 + 8e^{2x}$ 的一个特解应具有形式 ().
A. $ax^2 + bx + ce^{2x}$ B. $ax^2 + bx + c + Ex^2 e^{2x}$
C. $ax^2 + be^{2x} + cxe^{2x}$ D. $ax^2 + (bx^2 + cx)e^{2x}$
9. 下列微分方程为齐次微分方程的是 ().

- A. $(x^2 + xy)dx = (y^2 + 2xy)(dx - dy)$
 B. $(e^{2x} + 2y)dx + (ye^x + 2x)dy = 0$
 C. $y' = 2y + x \sin y$
 D. $y' - (\sin x + 1)y = 5$
10. $xy' - y = 1$ 的通解是 ().
 A. $y = Cx$ B. $x(y-1) = C$ C. $y = Cx - 1$ D. $x^2 + (y-1)^2 = C$
11. 微分方程 $(y')^3 + y'' + xy^4 = x$ 的阶数是 ().
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
12. 微分方程 $y(x+y)dx = x^2dy$ 为 ().
 A. 一阶线性方程 B. 齐次方程
 C. 可分离变量方程 D. 二阶线性方程
13. 下列方程为一阶线性方程的是 ().
 A. $y' - \frac{y}{x} = x + 1$ B. $yy' = x + x^2y$
 C. $(y')^2 = xy$ D. $y'' = xy^2$
18. 求方程 $y'' + 6y' + 9y = xe^{-3x}$ 的特解时, 应令其为 ().
 A. $\bar{y} = (ax+b)e^{-3x}$ B. $\bar{y} = x(ax+b)e^{-3x}$
 C. $\bar{y} = x^2(ax+b)e^{-3x}$ D. $\bar{y} = C_1xe^{-3x}$
19. $y'' - 4y' + 4y = 1$ 的一个特解是 ().
 A. x B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{4}x$ D. $\frac{1}{4} - x$

二、填空题.

1. $xy'' + 2x^2y' + x^3y = x^4 + 1$ 是_____阶微分方程.
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ 的通解为_____.
3. $y'' + 3y = \sin 2x$ 的通解是_____.
4. 以 $y = (x+C)x$ 为通解的微分方程是_____.
5. 微分方程 $y'' - 6y' + 9y = (x-1)e^{3x}$ 的特解形式可设为_____.
6. 若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是一阶非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的两个不同的特解, 则该方程的通解是_____.
7. $y'' - y' + 2y = 0$ 的通解为_____.
8. $y'' - 7y' + 6y = 0$ 的通解为_____.
9. 设 $r_1 = 3$, $r_2 = 4$ 为方程 $y'' + py' + qy = 0$ (其中 p, q 均为常数) 的特征方程的两个根. 则该方程的通解为_____.
10. 设某方程的通解为: $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$, 且 $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$, 则 $C_1 =$ _____, $C_2 =$ _____.
11. 满足条件 $f(x) + 2\int_0^x f(x)dx = x^2$ 的微分方程是_____.

12. $\frac{dy}{dx} = y + 1$ 的满足初始条件 $f(0) = 1$ 的特解为_____.

13. 设曲线 $y = y(x)$ 上任一点 (x, y) 的切线垂直于该点与原点的连线, 则曲线所满足的微分方程为_____.

14. 求 $y'' + 4y' = x^2 - 1$ 的特解时, 应令 $\bar{y} =$ _____.

15. 微分方程 $y'' + y = 0$ 的一个解是_____.

三、计算题.

求下列微分方程的通解或特解.

1. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$.

2. $\left(1 + 2e^{\frac{x}{y}}\right)dx + 2e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$.

3. $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$.

4. $y'' - y' - 2y = 0$.

5. $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$.

6. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

7. $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$.

8. $(x + y)dy = (y - x)dx$.

9. $y'' + y' - 2y = e^{-x}$.

10. $y'' - 3y' + 2y = 5$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

11. $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)e^{3x}$.

四、应用题

1. 求 $y''' = x$ 经过点 $M(0,1)$ 且在此点与直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 相切的积分曲线.
2. 求一曲线的方程, 这曲线通过原点, 并且它在点 (x, y) 处的切线斜率等于 $2x + y$.
3. 求微分方程 $y' = e^{2x-y}$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 的特解.
4. 求方程 $y'' - y = 0$ 的积分曲线, 使其在点 $(0,0)$ 处与直线 $y = x$ 相切.
5. 求 $y'' - y = 4xe^x$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$ 的特解.

习题B

一、选择题.

1. 下列方程中可分离变量的是 ().

A. $\sin(xy)dx + e^y dy = 0$

B. $x \sin y dx + y^2 dy = 0$

C. $(1+xy)dx + y^2 dy = 0$

D. $\sin(x+y)dx + e^{-xy} dy = 0$

2. $y'' = e^{-x}$ 的通解为 ().

A. $y = -e^{-x}$

B. $y = e^{-x} + x + C$

C. $y = e^{-x} + C_1 x + C_2$

D. $y = -e^{-x} + C_1 x + C_2$

3. 若 $y_1(x)$ 是非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的一个特解, 则该方程的通解是 ().

A. $y = y_1(x) + e^{-\int P(x)dx}$

B. $y = y_1(x) + Ce^{-\int P(x)dx}$

C. $y = y_1(x) + e^{\int P(x)dx} + C$

D. $y = y_1(x) + Ce^{\int P(x)dx}$

4. 微分方程 $y'' + y = 3\sin x + 4\cos x$ 的特解形式为 ().

A. $a \cos x + b \sin x$

B. $x(a \cos x + b \sin x)$

C. $x^2(a \cos x + b \sin x)$

D. $x^3(a \cos x + b \sin x)$

5. 方程 $xy' + y = 3$ 的通解是 ().

A. $y = \frac{C}{x} + 3$

B. $y = \frac{3}{x} + C$

C. $y = -\frac{C}{x} - 3$

D. $y = \frac{C}{x} - 3$

6. 函数 $y = y(x)$ 的图形上点 $(0, -2)$ 的切线为 $2x - 3y = 6$, 且该函数满足微分方程 $y'' = 6x$, 则此函数为 ().

A. $y = x^3 - 2$

B. $y = 3x^2 + 2$

C. $3y - 3x^3 - 2x + 6 = 0$

D. $y = x^3 + \frac{3}{2}x$

7. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$ 的一个特解应具有形式 ().

A. $Ae^x \cos 2x$

B. $e^x(A \cos 2x + B \sin 2x)$

C. $xe^x(A \cos 2x + B \sin 2x)$

D. $x^2 e^x(A \cos 2x + B \sin 2x)$

8. 微分方程 $x^3(y''') - yy' = 0$ 的阶数是 ().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

9. $xdy - ydx = 0$ 的通解是 ().

A. $y = Cx$

B. $x(y-1) = C$

C. $y = Cx - 1$

D. $x^2 + (y-1)^2 = C$

10. $y'' - y' = 2x$ 的一个特解为 ().

A. $y = -x - 2$

B. $y = x + 2$

C. $y = -x^2 - 2x$

D. $y = x^2 + 2x$

11. 下列微分方程中, 为可分离变量微分方程的是 ().

A. $xydx - dy = xy^2 dx$

B. $xy' - \cos x = yy'$

C. $(y')^2 x = x + y$

D. $(y^2 + xy)dy = x^2 dx$

12. 下列微分方程中是一阶线性方程的是 ().

- 101

8. 设二阶常系数奇次线性方程的特征方程的两个根为 $r_1 = 1 + 2i$, $r_2 = 1 - 2i$, 则该二阶常系数齐次线性微分方程为_____.

9. 微分方程 $\sqrt{y''} - 2y' + \sin x = 1$ 的阶数为_____.

10. 通解为 $y = Ce^x$ (C 为任意实数) 的微分方程为_____.

11. $xy' = 4y$ 的通解为_____.

12. 设 $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ 是微分方程 $y''' - xy' + 2y = 1$ 的通解, 则任意常数的个数 $n =$ _____.

13. 方程 $x^2 dy = y^2 dx - x^2 y dy$ 是_____.

14. 方程 $x^2 y^{(4)} - (y')^3 = 1$ 的阶数是_____.

15. 微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = x$ 的通解是_____.

三、求下列微分方程的通解或特解.

1. $x^2 dy = (y^2 - xy + x^2) dx$.

2. $\frac{dy}{dx} - 2y = 2x$.

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + y^2}$.

4. $y'' + 5y' + 6y = 2e^{-x}$.

5. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.

6. $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -5$.

7. $(1 + x^2)y' + xy - 1 = 0$.

8. $y'' - 4y' + 13y = 0$.

9. $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

10. $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x$.

四、计算题.

1. 设 $\int_0^x f(t)dt = e^x - 1 - f(x)$, 求 $f(x)$.

2. 验证: $y = x^2 - \frac{x}{2}$ 是微分方程 $x^2 y'' - 2y = x$ 满足初始条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = -\frac{1}{2}$ 的一个特解.

3. 求以 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ 为通解的微分方程. (其中 C_1, C_2 , 为任意实数)

4. 已知函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 满足: (1) $f'(x) = f''(x)$, (2) $f(0) = 1$, (3) $f'(0) = 2$, 求 $f(x)$.

第8章 级数

习题A

一、选择题.

1. 下列级数中收敛的是 ().

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{q^n} (|q| < 1)$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$

2. 下列级数中, 条件收敛的是 ().

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n^2}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$

3. 设 α 为常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n\alpha}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ ().

A. 绝对收敛

B. 条件收敛

C. 发散

D. 收敛性与 α 的取值无关

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^{2n}$ 的收敛区间为 ().

A. $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

B. $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

D. $(-3, 3)$

5. 正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n (u_n > 0)$ 收敛的充分必要条件是 ().

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 且 $u_n \geq u_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \neq \infty$ (s_n 为部分和)

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho < 1$

6. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 ($u_n \geq 0$), 则级数 () 一定收敛.

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + 1)$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - 1)$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u^n$

7. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = -1$ 处收敛, 则该幂级数在 $x = 1$ 处 ().
- A. 发散
B. 条件收敛
C. 绝对收敛
D. 可能收敛也可能发散
8. 下列级数中, 条件收敛的是 ().
- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{5}}$
B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$
D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$
9. 下列说法正确的是 ().
- A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散
B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ 收敛
C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ 发散
D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n v_n)$ 发散
10. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1}$ 收敛, 则有 ().
- A. $p > 0$
B. $p < 0$
C. $p > 2$
D. $p < 2$
11. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 s_n 是其前 n 项的和, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n =$ ().
- A. s_n
B. a_n
C. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
D. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$
12. 收敛的常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 不改变常数项顺序而插入括号后所成的级数 ().
- A. 可能收敛
B. 发散
C. 收敛于原来级数之和
D. 收敛但级数和不变
13. 下列级数中发散的是 ().
- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n(n^2+1)}$
B. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2}{n}$
D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$
14. 下列级数中收敛的是 ().
- A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$
B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^2} + \frac{n-1}{n+1}\right)$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{4}{3}\right)^n$
D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{2n^3+1}$

15. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则下列级数中必收敛的是 ().
- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 1)$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)a_n$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 的收敛域为 ().
- A. $(-1, 1)$ B. $[-1, 1)$ C. $[-1, 1]$ D. $(-1, 1]$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 - n}$ 的收敛域为 ().
- A. $[0, 2]$ B. $[0, 2)$ C. $(0, 2]$ D. $[-1, 1]$
18. 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ().
- A. 绝对收敛 B. 发散 C. 条件收敛 D. 可能收敛也可能发散
19. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的和函数为 ().
- A. $-\ln(1+x)$ B. $\ln(1+x)$ C. $\ln(1-x)$ D. $-\ln(1-x)$
20. 下列级数收敛的是 ().
- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 5^n}{3^n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$
- C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

二、填空题.

1. 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 是它收敛的_____条件, 不是它收敛的_____条件.
2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x_1 = 0$ 处收敛, 则其收敛半径 R 必不小于_____. 若该幂级数在 $x_2 = 3$ 处发散, 则收敛半径 R 必不大于_____.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + (-1)^n 3^n} x^{2n-1}$ 的收敛半径是_____, 收敛区域是_____.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} =$ _____.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 的和为_____.
6. 当 a _____ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n} (a > 0)$ 收敛
7. 在区间 $(-1, 1]$ 内幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ 的和函数是_____.

8. 当 $|x| < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3}$ 的和 $s =$ _____.
9. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n n!}{n^n} =$ _____.
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ 的收敛半径 $R =$ _____, 收敛域为 _____.
11. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$, $x \in (-1, 1]$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的和函数= _____ (并注明收敛域).
12. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 在 $x=0$ 处展开的幂级数为 _____, 其中 x 应满足 _____.
13. $y = \ln(1+x)$ 的麦克劳林级数为 _____, 其中 x 应满足 _____.
14. $y = \cos x$ 的麦克劳林级数为 _____, 其中 x 应满足 _____.
15. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为 $f(x) = x+1$, 又设 $s(x)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数, 则 $s\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ _____, $s(\pi) =$ _____, $s\left(\frac{5\pi}{2}\right) =$ _____, $s(3\pi) =$ _____.

三、判别下列级数的敛散性.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}$.

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 \cdot 2^n}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

四、判别下列级数是绝对收敛，还是条件收敛或发散.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n + \ln n}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n + \sin n}{2n}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n!}.$$

五、计算题.

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径, 收敛域及在收敛域内的和函数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$ 的收敛半径, 收敛域及在收敛域内的和函数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

3. 将函数 $f(x) = \frac{x}{16+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

4. 将函数 $f(x) = \ln(1+x-2x^2)$ 展开成 x 的幂级数 ($f(x) = \ln(1-x) + \ln(1+2x)$).

六、应用题.

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0) \\ e^x, & x \in [0, \pi) \end{cases}$, 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

习题B

一、选择题.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$ 发散, 则有 ().
A. $p \leq 0$ B. $p > 0$ C. $p \leq 1$ D. $p < 1$
- 下列级数中, 绝对收敛的级数是 ().
A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2}$
- 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n a_n$ ().
A. 发散 B. 条件收敛
C. 绝对收敛 D. A. B. C 三选项均不对
- $f(x) = \cos x$ 的麦克劳林级数中, 若 x^9 和 x^{10} 项的系数分别用 a_9 和 a_{10} 表示, 则 ().
A. $a_9 = a_{10}$ B. $a_9 > a_{10}$ C. $a_9 < a_{10}$ D. $|a_9| > |a_{10}|$
- 下列级数收敛的是 ().
A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n^2}$
- 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+3} x^n$ 的收敛域是 ().
A. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ C. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ D. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$
- 下列级数发散的是 ().
A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2$ C. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$
- 下列级数中, 绝对收敛的是 ().
A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$
- 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则对 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 来说, 结论 () 必成立.
A. 级数收敛 B. 级数发散
C. 其敛散性不定 D. 等于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$
- 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛是 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 的 ().

- A. 无关条件 B. 必要条件 C. 充分条件 D. 充分必要条件
11. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 的和 $S = (\quad)$.
- A. 2 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{2}$
12. 如果 $0 \leq b_n \leq a_n (n=1, 2, 3, \dots)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (\quad)$.
- A. 收敛 B. 发散 C. 条件收敛 D. 敛散不确定
13. 如果常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) (\quad)$.
- A. 收敛 B. 可能收敛 C. 发散 D. 条件收敛
14. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 ($a_n > 0$), 则下列级数中收敛的是 (\quad).
- A. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (10a_n - a_{n+1})$
- C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{a_n - a_{n+1}}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 10)$
15. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n (k \neq 0) (\quad)$.
- A. $k > 0$ 发散, $k < 0$ 收敛 B. $|k| > 1$ 收敛, $|k| < 1$ 发散
- C. 可能收敛也可能发散 D. 发散
16. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n}{2^{n+1}} (\quad)$.
- A. 绝对收敛 B. 条件收敛 C. 发散 D. 可能收敛
17. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} x^n + (-2x)^n \right)$ 的收敛半径为 (\quad).
- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. 3 D. $\frac{1}{3}$
18. 由麦克劳林公式, $\frac{1}{\sqrt{2+x}}$ 展开成 x 的幂级数的前三项是 (\quad).
- A. $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{4} x^2 \right)$ B. $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{3}{4} x^2 \right)$
- C. $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{3}{8} x^2 \right)$ D. $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{3}{32} x^2 \right)$
19. $\frac{1}{3-x}$ 的麦克劳林展开式是 (\quad).
- A. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n$ B. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$
20. $\sin x^2$ 的麦克劳林展开式是 (\quad).

$$\begin{aligned} \text{A. } & x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots (-\infty, +\infty) & \text{B. } & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots (-\infty, +\infty) \\ \text{C. } & \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \right)^2 (-\infty, +\infty) & \text{D. } & 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{4!} - \frac{x^8}{6!} + \cdots (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

二、填空题.

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定_____; 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 必定_____.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径是_____, 收敛区域是_____.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n-1) \cdot 3^n}$ 的收敛半径是_____, 收敛区域是_____.

4. $\arctan x$ 的麦克劳林级数是_____.

5. 级数 $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots$ 的一般项 $u_n =$ _____, 部分和 $s_n =$ _____, 和 $s =$ _____.

6. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径为_____.

7. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的部分和 $s_n =$ _____, 此级数的和为 $s =$ _____.

8. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 的部分和 $s_n =$ _____, 此级数的和 $s =$ _____.

9. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=2$, 则在下列 x 值: $2, -2, 1, -1, 0, e, \frac{1}{e}$ 中, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛点是_____, 绝对收敛点是_____, 发散点是_____, 不能确定敛散点的是_____.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x-3)^n}{2n-1}$ 的收敛域为_____.

11. $f(x) = e^x$ 的麦克劳林级数为_____, 其中 x 应满足_____.

12. $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 处展开的幂级数为_____, 其中 x 应满足_____.

13. $y = \sin x$ 的麦克劳林级数为_____, 其中 x 应满足_____.

14. $y = (1+x)^m$ 的麦克劳林级数为_____, 其中 x 应满足_____.

15. 已知 $f(x) = x + 1 (0 \leq x \leq \pi)$, 则将 $f(x)$ 展开成正弦级数, 有 $a_n =$ _____, $b_1 =$ _____; 又若将 $f(x)$ 展开成余弦级数, 则 $b_n =$ _____, $a_0 =$ _____.

三、判断下列级数的敛散性.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4^n+3}}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + 3^n \sin \frac{1}{4^n} \right).$

四、判别下列级数是绝对收敛，条件收敛还是发散.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n + 1}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n + 1}{n\sqrt{n}}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n} \cos n\alpha \quad (\alpha \text{ 正整数}).$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$ (p 为实常数).

五、求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n(n+1)}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n} x^{2n-1}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+1)^n}{n}.$

六、求下列幂级数的和函数，并指出其收敛区间.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1)x^{2n-2}$ ，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-2}}$ 的值.

七、将下列函数展开成 x 的幂级数.

1. $f(x) = \frac{1}{3+x}.$

2. $f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2}.$

八、计算题.

1. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 将其展开成傅里叶级数. $f(x)$ 在一个周期内的表达式为: $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$.

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数, 并写出展开式成立的 x 的区间.

1) $a^x (a > 0, a \neq 1)$.

2) $\sin \frac{x}{2}$.

3) $\frac{1}{1-x-x^2}$ [提示: $\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x} \right)$].

九、应用题.

将函数 $f(x) = \ln(x)$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数, 并由此证明 $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}$.

第9章 行列式矩阵与线性方程组

习题A

一、选择题.

1. 当 $\lambda = (\quad)$ 时, $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$.
- A. 1 B. -1 C. 2 D. 0
2. 设 n 阶方阵 A 可逆, 那么 A 的伴随矩阵 A^* 也可逆, 并且 A^* 的逆矩阵是 (\quad) .
- A. A B. $A \det A$ C. $\frac{1}{\det A} A$ D. $\frac{1}{(\det A)^{n-1}} A$
3. 设矩阵 $A = (1, 2, 3)$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, 则 AB 为 (\quad) .
- A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ C. $(1, 0, 6)$ D. 7
4. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 且 A 可逆, 则下列结论正确的是 (\quad) .
- A. 若 $AB \neq 0$, 则 B 可逆 B. 若 $AB = 0$, 则 $B = 0$
C. 若 $AB \neq 0$, 则 B 不可逆 D. 若 $AB = BA$, 则 $B = E$
5. 设 A 为 3 阶方阵, 且行列式 $\det A = 1$, 则 $\det(-2A)$ 之值为 (\quad) .
- A. -8 B. -2 C. 2 D. 3
6. 若 A 和 B 都是 n 阶矩阵, 则必有 (\quad) .
- A. $\det(A+B) = \det A + \det B$ B. $AB = BA$
C. $\det(AB) = \det BA$ D. $A^T B = B^T A$
7. 设 A, B 是任意的 n 阶矩阵, 下列命题中正确的是 (\quad) .
- A. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ B. $(A-E)(A+E) = (A-E)(A+E)$
C. $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ D. $(AB)^2 = A^2 B^2$
8. 设 A, B, C 均为 n 阶方阵, 且 A 可逆, 则必成立的是 (\quad) .
- A. 若 $AC = BC$, 则 $A = B$ B. 若 $BC = 0$, 则 $B = 0$
C. 若 $BC = AC$, 则 $B = C$ D. 若 $A^{-1}B = A^{-1}C$, 则 $B = C$

9. 设 A 为可逆方阵, 则 $(A^*)^{-1} = (\quad)$.

A. $\frac{1}{\det A} A$

B. $\frac{1}{\det A} A^*$

C. $A = -E$ 可逆

D. A 不可逆

10. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, 则下列矩阵运算有意义的是

(\quad).

A. ACB

B. ABC

C. BAC

D. CBA

11. 设 A 为 3 阶方阵, 且行列式 $\det A = \frac{1}{2}$, 则 $\det(-2A) = (\quad)$.

A. -4

B. 4

C. -1

D. 1

12. 方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 = 0 \\ 4x^2 - 8x^3 = -4 \\ x_1 + 3x^2 - 2x^3 = -2a \end{cases}$ 有解的充分条件是 (\quad).

A. $a = 2$

B. $a = -2$

C. $a = 3$

D. $a = -3$

二、填空题.

1. 当行列式 $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充要条件是_____.

2. 如果齐次方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2\lambda x_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 那么 $\lambda =$ _____.

3. 设 A, B 均为三阶方阵, 且 $\det A = 3$, $\det B = -2$, 则 $\det AB^T =$ _____.

4. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $B = (2 \ -1 \ 3)$, 则 $AB =$ _____.

5. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则行列式 $\det 2A^T =$ _____.

6. 已知方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 3 \end{cases}$ 无解, 则 $k =$ _____.

7. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, A^T 为 A 的转置, 则 $A^T B =$ _____.

8. 设 $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, A^* 为伴随矩阵, 则 $\det A^* =$ _____.

9. 若方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = k \end{cases}$ 有解, 则常数 $k =$ _____.

10. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 的基础解系所含解向量的个数为 _____.

三、计算题.

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ 的值.

2. 问 λ 为何值时, 方程组 $\begin{cases} x_1 + x_3 = \lambda \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda + 2 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 2\lambda + 3 \end{cases}$ 有解, 并求出通解.

3. 当 a 为何值时, 方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = a \end{cases}$ 有解, 若有解时求出其通解.

4. 已知行列式中 $\begin{vmatrix} 1 & x & 3 \\ x & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ 中 (1,2) 元素的代数余子式 $A_{12} = 8$, 求 (2,1) 元素的代数余子式 A_{21} 的值.

5. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

6. 求方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ 的基础解系与通解.

7. 设 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, 求 X .

8. 求下列方程组的通解 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$.

习题B

一、选择题.

1. 设矩阵 A 为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 为了使矩阵 A 的秩最小, 那么 λ 为 ().

- A. 2 B. -1 C. $\frac{9}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

2. 设 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 的系数矩阵 A 的秩为 r , 则 $AX=0$ 有非零解的充分条件是 ().

- A. $r=n$ B. $r < n$ C. $r \geq n$ D. $r > n$

3. 设行列式 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 则 k 的取值为 ().

- A. 2 B. -2 或 3 C. 0 D. -3 或 2

4. 设3阶方阵 A 的元素全为1, 则 $R(A)$ 为 ().
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
5. 若线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 2 \end{cases}$ 无解, 则 λ 等于 ().
 A. 2 B. 1 C. 0 D. -1
6. 设 A 是 n 阶可逆矩阵, 则下列命题中错误的是 ().
 A. A^T 必可逆 B. A^2 必可逆 C. $-2A$ 必可逆 D. $A+E$ 必可逆
7. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 则必有 ().
 A. $\det A \det B = \det B \det A$ B. $\det(A+B) = \det A + \det B$
 C. $(A+B)^T = A+B$ D. $(AB)^T = A^T B^T$
8. 设 n 阶方阵满足 $A^2 - A - 2E = 0$, 则必有 ().
 A. $A = 2E$ B. $A = -E$ C. $A - E$ 可逆 D. A 不可逆
9. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 若任何 n 维向量都是方程组 $AX = 0$ 的解, 则 ().
 A. $A = 0$ B. $0 < R(A) < n$ C. $R(A) = n$ D. $R(A) < n$
10. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 - E = 0$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵, 则必有 ().
 A. $A = E$ B. $A = -E$ C. $A = A^{-1}$ D. $\det A = 1$
11. 设 a_i, b_i 均为非零常数 ($i=1,2,3$), 且齐次线性方程组 $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{cases}$ 的基础解系含2个解向量, 则必有 ().
 A. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ B. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ C. $a_i = b_i (i=1,2,3)$ D. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

二、填空题.

1. 在 n 阶行列式中, 某一行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和为_____.

2. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $A^T A =$ _____.

3. 设 α_1, α_2 是 $n(n \geq 3)$ 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 则 $R(A) =$ _____.

4. 设 A 是 n 阶可逆矩阵, 若行列式 $\det A = -\frac{1}{n}$, 则行列式 $\det A^{-1} =$ _____.

5. 设 A 是 5×7 矩阵, $R(A) = 3$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中解向量的个数为_____.

6. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, 则行列式 $\det(AA^T)$ 的值为_____.

7. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 10 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ 的值为_____.

8. 设 A, B 均为3阶方阵, $\det A = 3$, $\det B = -2$, 则 $\det(-2A^T B^{-1}) =$ _____.

9. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -10 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ 的秩等于_____.

10. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 的基础解系所含解向量的个数为_____.

三、计算题.

1. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & k \\ -1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $R(A) = 2$, 求 k 的值.

2. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足 $AX + B = X$, 求 X .

3. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + mx_3 = k \end{cases}$ 有无穷多解, 求 m, k 的值, 并求出方程组的通解.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

5. a 为何值时, 方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 = 10 \\ x_2 - x_3 = a \end{cases}$ 有解, 如果有解求出方程组的通解.

6. 设矩阵 A 与 B 满足 $AB = A + 2B$, 且 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 B .

四、证明题.

证明 $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$.

第 10 章 概率统计初步

习题A

一、选择题.

1. 设随机事件 A 与 B 互不相容, $P(A)=0.4$, $P(B)=0.2$, 则 $P(A|B)=$ ().
A. 0 B. 0.2 C. 0.4 D. 0.5
2. 设 A, B 为两个随机事件, 则 $(A \cup B) \cap A =$ ().
A. $A \cap B$ B. A C. D. $A \cup B$
3. 设一批产品共有 1000 个, 其中有 50 个次品. 从中随机地有放回地抽取 500 个产品, X 表示抽到次品的个数, 则 $P\{X=3\}=$ ().
A. $\frac{C_{50}^3 C_{950}^{497}}{C_{1000}^{500}}$ B. $\frac{A_{50}^3 A_{950}^{497}}{A_{1000}^{500}}$
C. $C_{500}^3 (0.05)^3 (0.95)^{497}$ D. $\frac{3}{500}$
4. 设 A, B 为随机事件, $P(A)>0$, $P(A|B)=1$, 则必有 ().
A. $P(A \cup B)=P(A)$ B. $A \subset B$
C. $P(A)=P(B)$ D. $P(A \cap B)=P(A)$
5. 某人连续向一目标射击, 每次命中目标的概率为 $\frac{3}{4}$, 他连续射击直到命中为止, 则射击次数为 3 的概率是 ().
A. $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ B. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4}$ C. $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4}$ D. $C_4^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{3}{4}$
6. 同时掷 3 枚均匀硬币, 则至多有 1 枚硬币正面向上的概率为 ().
A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$
7. 已知随机变量 X 的分布列为 ().

X	-1	2	5
P	0.2	0.35	0.45

, 则 $P(\{-2 < X \leq 4\} - \{X > 2\}) =$
A. 0 B. 0.2 C. 0.35 D. 0.55
8. 已知 $P(A)=0.3$, $P(B)=0.5$, $P(A \cup B)=0.6$, 则 $P(A \cap B)=$ ().
A. 0.15 B. 0.2 C. 0.8 D. 1
9. 设 $P(A)=a$, $P(B)=b$, $P(A \cup B)=c$, 则 $P(A \cap \bar{B})=$ ().

- A. $a-b$ B. $c-b$ C. $a(1-b)$ D. $b-a$

10. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 x_1, x_2 的分布函数, 为使 $F(x) = aF_1(x) - bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数, 在下列给定的多组数值中应取 ().

- A. $a = \frac{3}{5}, b = -\frac{2}{5}$ B. $a = \frac{2}{3}, b = \frac{2}{3}$
 C. $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$ D. $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$

11. 设 A, B 是两个随机事件, 若 B 发生则 A 必发生, 则下列式子中正确的是 ().

- A. $P(A \cup B) = P(A)$ B. $P(A \cap B) = P(A)$
 C. $P(B|A) = P(B)$ D. $P(B - A) = P(B) - P(A)$

12. 打靶3发, 事件 A_i 表示“击中 i 发”, $i = 0, 1, 2, 3$, 那么事件 $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 表示 ().

- A. 全部击中 B. 至少有一发击中
 C. 必然击中 D. 击中3发

13. 以 A 表示事件“甲种产品滞销, 乙种产品滞销”, 则其逆事件 \bar{A} 为 ().

- A. “甲种产品滞销, 乙种产品畅销”
 B. “甲、乙两种产品均畅销”
 C. “甲种产品滞销”
 D. “甲种产品或乙种产品畅销”

二、填空题.

1. 设随机事件 A 与 B 相互独立, $P(A) = P(B) = 0.5$, 则 $P(A \cup B) =$ _____.

2. 从分别标有1, 2, ..., 9 号码的九件产品中随机取三次, 每次取一件, 取后放回, 则取得的三件产品的标号都是偶数的概率为_____.

3. 把三个不同的球随机地放入三个不同的盒中, 则出现两个空盒的概率为_____.

4. 一口袋中装有3只红球, 2只黑球, 今从中任意取出2只球, 则这2只球恰为一红一黑的概率是_____.

5. 已知随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3	4	5
P	$2a$	0.1	0.3	a	0.3

则常数 $a =$ _____.

6. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $D(X) = 1$, $D(Y) = 2$, 则 $D(X - Y) =$ _____.

7. 一批产品中有10个正品和2个次品, 现随机抽取两次, 每次取一件, 取后放回, 则第二次取出的是次品的概率为_____.

8. 10粒围棋子中有2粒黑子, 8粒白子, 将这10粒棋子随机地分成两堆, 每堆5粒, 则两堆中各有1粒黑子的概率为_____.

9. 一袋中装有两种球: 白色球和花色球. 已知白色球占总数的30%, 又在花色球中有50%涂有红色. 现从袋中任取一球, 则此球涂有红色的概率为_____.

10. 同时掷3颗骰子, 则至少有一颗点数为偶数的概率为_____. 又若将一颗骰子

掷100次, 则出现偶数点的次数大于60次的概率近似为_____.

11. 设随机变量 X 有密度

$$f(x) = \begin{cases} K(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

则 $K =$ _____.

12. 设 A, B 是两个相互独立的事件, 已知 $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.2$, 则 $P(A \cup B) =$ _____.

13. 袋中装有3只白球、5只红球、2只黑球, 在袋中任取4只球, 则其中恰有2只白球、1只红球、1只黑球的概率为_____.

14. 设随机变量 X 服从参数 $\lambda = 3$ 的泊松分布, 则 $P\{X \geq 2\} =$ _____, $P\{X > 0 | X < 2\} =$ _____.

15. 袋中有 m 个黄色乒乓球, n 个白色乒乓球, 依次取两个, 取后不放回, 则第二次取得黄色乒乓球的概率是_____.

16. 一批产品中一、二、三等品各占60%, 30%, 10%, 从中随意抽取一件, 结果不是三等品, 则取得一等品的概率为_____.

17. 已知在10个产品中有2个次品, 在其中取两次, 每次取一个, 作不放回抽样, 则第二次取出的是次品的概率为_____.

三、计算题.

1. 三门高射炮对一架敌机一齐各发一炮, 它们的命中率分别为10%, 20%, 30%.

求(1) 敌机至少中一弹的概率.

(2) 敌机恰中一弹的概率.

2. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} A \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

试求(1) 系数 A ; (2) X 落在区间 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 内的概率.

3. 已知 $P(A)=0.5$, $P(B)=0.6$, $P(AB)=0.4$, 求下列概率:

(1) $P(\bar{A}|B)$; (2) $P(\bar{A}|\bar{B})$.

4. 设 A, B 为两个随机事件, $0 < P(B) < 1$, 且 $P(A|B) = P(A|\bar{B})$, 证明事件 A 与 B 相互独立.

5. 加工某种零件, 如生产情况正常, 则次品率为 3%, 如生产情况不正常, 则次品率为 20%, 按以往经验, 生产情况正常的概率为 80%, ①任取一只零件, 求它是次品的概率. ②已知所制成的一个零件是次品, 求此时生产情况正常的概率.

6. 在箱中装有 10 个产品, 其中有 3 个次品, 从这箱产品任意抽取 5 个产品, 求下列事件的概率.

(1) $A = \{\text{恰有 1 件次品}\}$

(2) $B = \{\text{没有次品}\}$

习题B

一、选择题.

1. 掷一枚不均匀硬币, 正面朝上的概率为 $\frac{2}{3}$, 将此硬币连掷4次, 则恰好3次正面朝上的概率是 ().
 A. $\frac{8}{81}$ B. $\frac{8}{27}$ C. $\frac{32}{81}$ D. $\frac{3}{4}$
2. 从0,1,...,9十个数字中随机地有放回地接连抽取四个数字, 则“8”至少出现一次的概率为 ().
 A. 0.1 B. 0.3439 C. 0.4 D. 0.6561
3. 设随机事件 A 与 B 互不相容, 且 $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, 则 ().
 A. $P(A) = 1 - P(B)$ B. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
 C. $P(A \cup B) = 1$ D. $P(\overline{A \cap B}) = 1$
4. 将两封信随机地投入四个邮筒中, 则未向前面两个邮筒投信的概率为 ().
 A. $\frac{2^2}{4^2}$ B. $\frac{C_2^1}{C_4^2}$ C. $\frac{2!}{A_4^2}$ D. $\frac{2!}{4!}$
5. 设 A, B 为随机事件, 且 $A \subset B$, 则 $\overline{A \cup B}$ 等于 ().
 A. \overline{A} B. \overline{B} C. \overline{AB} D. $\overline{A \cup B}$
6. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 则 $f(x)$ 一定满足 ().
 A. $0 \leq f(x) \leq 1$ B. $P\{X > x\} = \int_{-\infty}^x f(t)dt$
 C. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ D. $f(+\infty) = 1$
7. 设随机事件 A 与 B 互不相容, 且有 $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, 则下列关系成立的是 ().
 A. A, B 相互独立 B. A, B 不相互独立
 C. A, B 互为对立事件 D. A, B 不互为对立事件
8. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos x, & a < x < b; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 则区间 (a, b) 是 ().
 A. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ B. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ C. $(-\pi, \pi)$ D. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
9. 设 $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.7$, $P(A|B) = 0.8$, 则下列式子中正确的是 ().
 A. 事件 A 与 B 相互独立 B. 事件 A 与 B 互斥
 C. $B > A$ D. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
10. 对于任意两个事件 A 和 B , 则 $P(A - B)$ 是 ().
 A. $P(A) - P(B)$ B. $P(A) - P(B) + P(AB)$
 C. $P(A) - P(A \cap B)$ D. $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
11. 当随机变量 X 的可能值充满区间为 (), 则 $\varphi(x) = \sin x$ 可以成为随机变量 x 的

密度函数.

A. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ B. $[0, \pi]$ C. $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ D. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

12. 设随机变量 X, Y 相互独立且同分布. 已知 $P\{X=1\} = P\{Y=1\} = \frac{1}{3}$, $P\{X=2\} = P\{Y=2\} = \frac{2}{3}$, 则有 ().

A. $P\{X=Y\} = \frac{1}{3}$ B. $P\{X=Y\} = \frac{2}{3}$
C. $P\{X=Y\} = 1$ D. $P\{X=Y\} = \frac{5}{9}$

二、填空题.

1. 设随机事件 A 与 B 相互独立, $P(A)=0.2$, $P(B)=0.8$, 则 $P(A|B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设两两独立的三个随机事件 A, B, C 满足 $A \cap B \cap C = \emptyset$, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = x$, 则当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $P(A \cup B \cup C) = \frac{3}{4}$.

3. 设随机事件 A 与 B 相互独立, A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等, 且 $P(A) = \frac{1}{3}$, 则 $P(B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = \frac{2}{5}$, 则 $P(AB) = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $P\{X \leq 1\} = \frac{1}{2}$, $P\{Y \leq 1\} = \frac{1}{3}$, 则 $P\{X \leq 1, Y \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 某地区成年人患结核病的概率为 0.015, 患高血压病的概率为 0.08, 设这两种病的发生是相互独立的, 则该地区内任一成年人同时患有这两种病的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 A, B, C 为三个随机事件, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{6}$, $P(A \cap B \cap C) = 0$, 则 $P(A \cup B \cup C) = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 已知 $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.8$, 那么 $P(\overline{A \cap B}) = \underline{\hspace{2cm}}$, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 观察四个新生儿的性别, 设每一个出生婴儿是男婴还是女婴概率相等, 则恰有 2 男 2 女的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. 袋中装有编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 的 7 张卡片, 今从袋中任取 3 张卡片, 则所取出的 3 张卡片中有 6 无 4 的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 袋中装有 3 只白球、5 只红球, 在袋中取球两次, 每次取 1 只, 作不放回抽样, 则取到 2 只红球的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. 进行 5 次伯努利试验, 事件 A 在每次试验中发生的概率 $P(A) = 0.1$, 则在 5 次试验中 A 恰发生 2 次的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$, A 至少发生 1 次的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设 A, B 是两个互不相容的事件, 已知 $P(A|B) = 0.2$, 则 $P(B) =$ _____. 设 A, B 是两个相互独立的事件, 已知 $P(A) = 0.3$, $P(A \cup B) = 0.7$, 则 $P(A \cup B) =$ _____. 设 $P(\bar{B}) = 0.3$, $P(A|B) = 0.2$, 则 $P(A \cap B) =$ _____.

14. 设随机变量 X 具有分布函数 $F(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, 则 $P\{X > 4\} =$ _____, $P\{1 < X \leq 2\} =$ _____, 概率密度 $f(x) =$ _____.

15. 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, $P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0$, 则 A, B, C 均不发生的概率为 _____.

16. 已知在 10 只产品中有 2 只次品, 在其中取两次, 每次取一只, 作不放回抽样, 则一只是正品, 一只是次品的概率是 _____.

17. 已知随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 且 $P\{X = 0\} = \frac{1}{2}$, 则 $P\{X < 2\} =$ _____.

三、计算题.

1. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}, \text{ 其中 } C \text{ 为待定常数.}$$

求 (1) 常数 C 的值;

(2) X 落入 $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$ 内的概率.

2. 已知 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, 按下列条件, 试求 $P(A \cup B)$ 的值.

(1) $P(A|B) = P(A)$;

(2) $P(\bar{A}|B) = P(B)$.

3. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} ax+1, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 试求(1)常数 } a; (2) P\{1 < X < 3\}.$$

4. 设随机变量 X, Y 有联合概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy, & 0 < x < 1, 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 (1) 确定常数 c ;

(2) X, Y 是否相互独立 (要说明理由).

5. 一人携 3 发子弹去靶场打靶, 命中一发或子弹打完他即离开靶场, 他的射击命中率为 p 设各次是否击中相互独立, 求他离开靶场时已命中一发的概率.

6. 连续随机变量 x 的概率密度为

$$f(x) = A \cdot e^{-|x|} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

求 (1) 系数 A ;

(2) 随机变量 X 落在区间 $(-1, 1)$ 内的概率.

参 考 答 案

第 1 章 函数

习题 A

一、选择题.

1. C 2. C 3. C 4. D 5. D 6. B 7. C 8. A 9. B 10. D 11. D 12. B
13. B 14. C 15. C

二、填空题.

1. 8 2. $[-2, 0]$ 3. $(0, 1) \cup (1, 3), \frac{3}{2}$ 4. y 5. $\arcsin(1-x^2), [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 6. e^{2x}
7. 偶 8. 0 9. $[2, 4]$ 10. 1, $\sqrt{1+a^2}$

三、求下列函数的函数值.

$$1. 0, -4, 2, f(a) = \begin{cases} \frac{a-2}{a+1}, & a \geq 2; \\ \frac{-a+2}{a+1}, & a < 2 \text{ 且 } a \neq 1 \end{cases} \quad 2. -2, -\frac{4}{5} \quad 3. f(f(x)) = x \quad x \in \mathbb{R},$$

$$g(g(x)) = x \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(g(x)) = \frac{x}{2-x} \quad x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq 2, \quad g(f(x)) = \frac{2x}{1+x} \quad x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq -1$$

四、求下列函数的反函数.

$$1. y = x^3 - 1 \quad x \in \mathbb{R} \quad 2. y = \frac{-2x}{(1+x)^2} \quad x \in [-1, 1]$$

五、应用题.

$$m = \begin{cases} ks, & 0 < s \leq a; \\ 0.2ka + 0.8ks, & s > a \end{cases}$$

习题 B

一、选择题.

1. B 2. B 3. A 4. B 5. B 6. D 7. B 8. A 9. A 10. D 11. D 12. A
13. C 14. D 15. D

二、填空题.

$$1. (-\infty, -2] \cup (2, +\infty) \quad 2. \frac{10}{3}, 2 \quad 3. y = (x-3)^2 \quad (x \geq 3) \quad 4. (1, +\infty)$$

$$5. \begin{cases} [a, 1-a], & 0 < a \leq \frac{1}{2}; \\ \emptyset, & a > \frac{1}{2} \end{cases} \quad 6. e^{x-2} \quad 7. [-1, 1] \quad 8. 1 \quad 9. [2, 3) \cup (3, 4) \quad 10. 2\pi$$

三、求函数值.

$$1. 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \quad 2. \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 3. x^2 + 4x + 4$$

四、求函数的定义域.

$$1. x \geq -2 \text{ 且 } x \neq \pm 1 \quad 2. [2, 3] \quad 3. (-4, 2) \cup (2, +\infty) \quad 4. x \geq -2 \text{ 且 } x \neq 2$$

$$5. \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty) \quad 6. -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad 2 \leq x \leq 3, \quad k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{4} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

五、判定下列函数的奇偶性.

$$1. \text{偶函数} \quad 2. \text{非奇非偶函数} \quad 3. \text{奇函数} \quad 4. \text{偶函数}$$

六、指出下列函数是怎样复合而成的.

$$1. y = 5^u \quad u = v^2 \quad v = 2x + 1 \quad 2. y = \arcsin u \quad u = 3^v \quad v = -x^2$$

$$3. y = \arctan u \quad u = \ln v \quad v = 3x \quad 4. y = \sqrt{u} \quad u = \ln v \quad v = 1 - 3x$$

七、应用题.

$$1. L = -0.2x^2 + (4-t)x - 1 \quad 2. R = \begin{cases} 250x, & 0 < x < 600 \\ 23x + 1.2 \times 10^4, & 6000 < x \leq 800 \\ 1.96 \times 10^5, & x > 800 \end{cases}$$

第 2 章 极限和连续

习题 A

一、选择题.

$$1. D \quad 2. D \quad 3. D \quad 4. A \quad 5. D \quad 6. B \quad 7. A \quad 8. C \quad 9. B \quad 10. D \quad 11. A \quad 12. D$$

$$13. A \quad 14. C \quad 15. B \quad 16. B \quad 17. B$$

二、填空题.

$$1. 0 \quad 2. b, 1, 1 \quad 3. \text{无穷小量} \quad 4. 0 \quad 5. \text{一, 无穷} \quad 6. 2 \quad 7. (-3, 2] \quad 8. 3 \quad 9. \frac{3}{2}$$

$$10. \text{一, 可去} \quad 11. e^{-2} \quad 12. 0 \text{ 和 } \pm 1, 1, 0$$

三、计算题.

$$1. 3, 9 \quad 2. 1) \text{左极限不存在, 右极限存在} \quad 2) \text{不存在} \quad 3) 1 \quad 3. -1 \quad 4. \frac{2}{3} \quad 5. \infty$$

$$6. 1 \quad 7. \left(\frac{3}{2}\right)^{200} \quad 8. a = -3, b = 2 \quad 9. e^2 \quad 10. \pi \quad 11. \frac{1}{2} \quad 12. e \quad 13. 0 \quad 14. \frac{2}{3} \quad 15. a = \frac{1}{2}$$

习题 B

一、选择题.

1. A 2. C 3. C 4. A 5. D 6. C 7. B 8. C 9. B 10. A 11. D 12. A
13. C 14. C 15. A 16. B

二、填空题.

1. 0 2. $\infty, -1$ 3. 无穷小量 4. 一, 跳跃 5. e 6. $(1, 2) \cup (2, +\infty)$ 7. $[0, 3)$ 8. e^k
9. 1 10. $\frac{1}{2}$ 11. 2

三、计算题.

1. 1 2. $\frac{2}{3}$ 3. 0 4. -1 5. $\frac{1}{2}$ 6. 0 7. 2 8. e^{-6} 9. 1 10. e^{-1} 11. $\ln 2$
12. 2 13. $\frac{1}{2}$ 14. $a=1, b=1$

第 3 章 导数与微分

习题 A

一、选择题.

1. B 2. D 3. D 4. D 5. C 6. C 7. D 8. C 9. B 10. B 11. B 12. D
13. D 14. B 15. A 16. A 17. C

二、填空题.

1. $-f'(x_0)$ 2. $f'(0)$ 3. 0 4. 2 5. $(\ln(e-1), (e-1))$, $y=(e-1)[x-\ln(e-1)+1]$
6. $\frac{dT}{dt}$ 7. $2t, 2$ 8. 0 9. $2e^{2x}$ 10. $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ 11. $3\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$ 12. $\frac{5}{3}\sqrt[3]{(5x-1)^2}$
13. $\frac{1}{x^2}\tan\frac{1}{x}$ 14. $3f'(3x)$ 15. $-\cot t$ 16. 3 17. $\frac{6!2^6}{(1+2x)^7}$ 18. $x^2(a+bx)e^{3x}$
19. $2^n \sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$ 20. 0.1106, 0.11

三、计算题.

1. $2^{\frac{1}{\cos x}} \ln 2 \cdot \tan x \cdot \sec x dx$ 2. $\frac{1}{2}e^x \left(\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$ 3. $\left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}} - 1 \right) dx$
4. $\frac{y}{5} \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x-3} - \frac{3}{x-4} \right)$ 5. -2 6. $\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \right]$
7. (1) $-f'(x_0)$, (2) $2f'(x_0)$ 8. (1) $-3f'(1)=-6$ (2) $-f'(1)=-2$
9. $f'(1)=\frac{1}{8}$ 10. $f'(x_0)=-2$ 11. 未必存在

12. (1) $-\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x}}$ (2) $x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$
13. (1) $5^{\ln(\tan x)} \frac{2 \ln 5}{\sin 2x} dx$ (2) $(2x \arctan x + 1) dx$ (3) $\left(\frac{e^{-3x}}{2\sqrt{x}(1+x)} - 3 \arctan \sqrt{x} \cdot e^{-3x} \right) dx$
- (4) $e^{f(x)} [f'(e^x) e^x + f'(x) f(e^x)] dx$
14. (1) $\frac{(-1)^n (n-1)!}{(x+1)^{n+1}}$ (2) $\frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^n} \quad n \geq 1$ (3) $(n+x)e^x$

习题 B

一、选择题.

1. C 2. A 3. B 4. A 5. B 6. B 7. B 8. C 9. D 10. D 11. B 12. A
13. C 14. B 15. A 16. B 17. B 18. B

二、填空题.

1. $\frac{2}{3}x^3$ 2. $a^x \ln a - \frac{1}{1+x^2}$ 3. $2\sqrt{x} + C$ 4. $\frac{e^{\sqrt{\sin 2x}}}{2\sqrt{\sin 2x}}$ 5. $\sin x, e^x$ 6. $\frac{1}{2} + e$ 7. 2
8. $(e^x \ln x + \frac{1}{x} e^x) dx$ 9. -2 10. $y = (1+e)x + 1$ 11. 1 12. $(\sin^2 x - \cos x) e^{\cos x}$
13. $-\frac{1}{x^2} f''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right)$ 14. $\left(3x^2 + \frac{1}{1+x}\right) dx$ 15. $\frac{y-2x}{2y-4}$ 16. $(\sqrt[3]{4} + 2e^{-2})(x+1) + e^{-2}$
17. $900(1-3x)^{98} - \frac{3}{x^2 \ln 2} - 4 \sin 2x$ 18. $\frac{1}{2}$ 19. $y = x$ 20. $2xf'(x^2)$

三、计算题.

1. $4(2x^2 + \sin^3 x)^3 (4x + 3 \sin^2 x \cdot \cos x)$ 2. $\frac{3 \cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}} + \frac{4}{x}$ 3. $2x - y - a = 0$ 4. 1
5. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 单调增区间, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 单调减区间 6. $f(1) = \frac{11}{6}, f(0) = 0$ 7. $\frac{1}{2e}$ 8. $x = 1$
- 处连续, 不可导 9. $x = 0$ 不可导, 其余点均可导

10. (1) $\cot x$ (2) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ (3) $\frac{4x \cdot \arctan(x^2 + 1)}{1 + (x^2 + 1)^2}$ (4) $-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} e^{\frac{1}{\sin x}}$
- (5) $2xe^{x^2}$ (6) $6 \sin(4x) e^{3 \sin^2 2x}$ (7) $\frac{e^{2x} \sin 2(e^{2x})}{\sqrt{\sin^2(e^{2x}) + \cos \frac{\pi}{3}}}$ (8) $[-3, 3]$

11. $x \in (-\infty, 1) \quad y' > 0, x \in (1, 2) \quad y' < 0, x \in (2, +\infty) \quad y' > 0$ 12. 最大值 $f(2) = 20$ 最小值 $f(-1) = -7$ 13. 极小值 $f(-1) = -\frac{1}{2}$ 极大值 $f(1) = \frac{1}{2}$ 14. $(a-1, \pm \sqrt{2(a-1)}), \sqrt{2a-1}$

习题 C

一、选择题.

1. A 2. C 3. D 4. C 5. A 6. B 7. C 8. B 9. A 10. C 11. C 12. C
13. A 14. B 15. B 16. C 17. A

二、填空题.

1. $3, \frac{3}{2}$ 2. 0 3. 3 4. $\frac{2x - e^{x-y}}{e^{x-y} - 2y}$ 5. $(2 - 4x + x^2)e^{-x}$ 6. 3 7. $f(a), f(b)$ 8. $n!$
9. $(2\cos 2x - \sin x)dx$ 10. $(\Delta x)^2$ 11. $(-2)^n e^{-2x}$ 12. $\frac{e^y}{1 - xe^y}, \frac{1 - xe^y}{e^y}$ 13. $-\frac{1}{3}$ 14. $\frac{4a^2}{\pi}$
15. 0 16. 极值点 17. -2 18. $\sin(\cos x)\sin x$

三、计算题.

1. $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 2. $\frac{4xe^{x^2}}{\sin 2e^{x^2}}$ 3. $\frac{3}{2}$ 4. $a = -2, b = 0$ 5. $\frac{2\sqrt[3]{12}}{9\sqrt[3]{\pi v^2}}$
6. 切线 $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$, 法线 $e^x + y - e^2 - 1 = 0$ 7. (1) $y' = \frac{2}{2 - \cos y}$ (2) $y' = \frac{y(x-1)}{x(1-y)}$
(3) $y' = \frac{x+y}{x-y}$ 8. (1) $\frac{2x\cos 2x - \sin 2x}{x^2}$ (2) $-\frac{3\sin 2x + 4\cos 2x}{e^x}$ (3) $\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$
(4) $b \left[(b-1) \left(\frac{a}{x} \right)^{b-2} \left(-\frac{a}{x^2} \right) + \left(\frac{a}{x} \right)^{b-1} \frac{2a}{x^3} \right] + \left(\frac{a}{b} \right)^x \ln^2 \frac{a}{b}$ 9. $3x + y - 5 = 0$ 10. (1) $\frac{1}{2}$ (2) e^{-1}
(3) 1 (4) 1 (5) $\frac{1}{3}$ (6) $-\frac{2}{3}$ (7) 0 11. $(m-n)f'(0)$ 12. e^4 13. 略 14. 长
 $\frac{2}{3}h$ 宽 $\frac{2}{3}\sqrt{6ph}$

第 4 章 不定积分

习题 A

一、选择题.

1. C 2. A 3. B 4. C 5. C 6. A 7. B 8. A 9. C 10. C 11. B 12. C
13. C 14. B 15. B 16. A 17. A 18. B 19. C 20. C

二、填空题.

1. $-\frac{1}{16(2x+3)^8} + C$ 2. $\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}$ 3. $\ln|\ln x| + C$ 4. $2[\sqrt{x} - \ln|1 + \sqrt{x}|] + C$
5. $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$ 6. $-\cos\sqrt{x} + C$ 7. $\cos x + x\sin x + C$ 8. $\ln(1 + \sin x) = C$
9. $e^{x^2} + C$ 10. $\frac{1}{4}\ln^4|x| + C$

三、计算题.

1. $3e^x - \frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}} + 4x + 2\ln|x| + C$ 2. $\frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C$ 3. $\arcsin \ln x + C$
4. $-\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{5x\sqrt{x}} + \ln|x| + C$ 5. $\ln|x| - \arctan x + C$ 6. $\frac{1}{a + \ln a}e^{nx}a^x + C$
7. $\frac{3}{2}\sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{7}{4}\right) + C$ 8. $\frac{1}{22}(2x-3)^{11} + C$ 9. $\arctan e^x + C$ 10. $\frac{1}{3}(1+2\ln x)^{\frac{3}{2}} + C$
11. $\cos\left(\frac{x+1}{x}\right) + C$ 12. $2\sqrt{\sin x} + C$ 13. $4\sqrt{3}\arctan \frac{2x-3}{\sqrt{3}}$ 14. $(\arctan \sqrt{x})^2 + C$
15. $2\sqrt{\ln x + 1} + \ln \left| \frac{\sqrt{\ln x + 1} - 1}{\sqrt{\ln x + 1} + 1} \right| + C$ 16. $-\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2 + x - 1) + C$
17. $-\frac{1}{3}x\cos(3x-2) + \frac{1}{3}\sin(3x-2) + C$ 18. $\frac{1}{2}x^2\ln(x-1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(x-1) + C$
19. $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$ 20. $\frac{1}{2}(x^2 + 1)\arctan x - \frac{x}{2} + C$
21. $x\tan x + \ln \cos x - \frac{1}{2}x^2 + C$ 22. $-\frac{1}{2}x\csc^2 x - \frac{1}{2}\cot x + C$
23. $\frac{1}{8}(\sin 2x - 2x\cos 2x) + C$ 24. $x\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C$
25. $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\arctan^2 x + C$

四、证明题. (略)

五、已知 $f(x)$ 的一个原函数是 xe^{-x} , 求

- (1) $xe^{-x} + C$ (2) $-x^2e^{-x} + C$ (3) $(x^2 + x + 1)e^{-x} + C$

习题 B

一、选择题.

1. A 2. C 3. A 4. D 5. B 6. C 7. B 8. D 9. B 10. D 11. C 12. C
13. A 14. D 15. B 16. D 17. A 18. B 19. D 20. B

二、填空题.

1. $-\frac{2}{9}(1-3x)^{\frac{3}{2}} + C$ 2. $\frac{1}{4}e^{2x^2+5} + C$ 3. $\frac{1}{x-3} + C$ 4. $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$
5. $-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x} + C$ 6. $\frac{1}{x} + C$ 7. $\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$ 8. $\ln|x| - \frac{1}{2}x^2 + C$ 9. $\cos \frac{1}{x} + C$
10. $-|\cos x| + C$

三、计算题.

1. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$ 2. $x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + C$ 3. $\frac{2}{5}x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2 - x + C$

4. $2x - \tan x + C$ 5. $\frac{3^x}{\ln 3} - 2 \arcsin x + C$ 6. $-\frac{1}{3}(1-2x)^{\frac{3}{2}} + C$ 7. $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$
 8. $-2\cos\sqrt{x} + C$ 9. $-e^{\frac{1}{x}} + C$ 10. $\arcsin \ln x + C$ 11. $-\frac{1}{2(x^2+1)} + C$ 12. $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$
 13. $\frac{2}{3}(\ln x + 1)^{\frac{3}{2}} + C$ 14. $\frac{1}{6}\arctan \frac{2}{3}x + C$ 15. $\frac{1}{3}\ln \frac{x-1}{x+2} + C$ 16. $\ln(x^2 + x + 2) + C$
 17. $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$ 18. $\ln(\cos x) + \frac{1}{2}\tan^2 x + C$ 19. $\ln|\sin x| - \frac{1}{2}\sin^2 x + C$
 20. $\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}\sin(2\ln x) + C$ 21. $\cos x + x\sin x + C$ 22. $x(\ln x - 1) + C$ 23. $-e^{-x}(1+x) + C$
 24. $\frac{1}{2}(x^2+1)\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}(x^2+1) + C$ 25. $\frac{1}{4}(\arcsin x)(2x^2-1) + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$

四、证明题. (略)

第 5 章 定积分及其应用

习题 A

一、选择题.

1. D 2. D 3. B 4. C 5. D 6. C 7. C 8. D 9. C 10. A 11. C 12. D
 13. B

二、填空题.

1. 24 2. 1 3. $\frac{32}{3}$ 4. 0 5. 奇函数 6. $u = \ln x, dv = \frac{1}{x^2}dx$ 7. 0 8. 0 9. 2π
 10. $\tan x$ 11. $\frac{1}{3}$ 12. 发散 13. $b-a-1$ 14. $f(b) - f(a) + 2(b-a)$ 15. $\frac{1}{2}$

三、计算题.

1. $\frac{35}{6}$ 2. $\frac{1}{2}\pi$ 3. $\frac{1}{6}\pi$ 4. $\frac{1}{4}\pi - \frac{2}{3}$ 5. $\frac{1}{2}\pi - 1$ 6. $1 - \frac{1}{4}\pi$ 7. $\frac{ae-1}{\ln(ae)}$ 8. $\frac{5}{3}$ 9. $\frac{3}{2}\ln \frac{5}{2}$
 10. $\frac{1}{2}$ 11. $2 - \frac{1}{2}\pi$ 12. $-\frac{2}{\pi^2}$ 13. $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$ 14. $\frac{1}{2}\ln \frac{e+1}{3(e-1)}$ 15. $10e^{\frac{1}{2}} - 16$ 16. 1
 17. $2\sqrt{2} - 2$ 18. $\frac{3}{2}$ 19. $\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$ 20. 1 21. $2x^4$ 22. $\frac{1}{2e} - \frac{1}{2}$

四、应用题.

1. $\frac{46}{15}\pi$ 2. 1 3. 1

习题 B

一、选择题.

1. B 2. A 3. B 4. C 5. A 6. C 7. A 8. B 9. B 10. D 11. A 12. C

二、填空题.

1. $-\sin^2 x$ 2. $\frac{8}{3}$ 3. 7 4. $\cot x$ 5. $-\frac{1}{2}\ln 2$ 6. 1 7. 0 8. $1-\frac{1}{4}\pi$ 9. 0
10. $2x \tan x$ 11. 发散 12. 0 13. 必要, 充分 14. $\frac{1}{2}\pi$ 15. $-2\ln(1+x^2)$

三、计算题.

1. 4 2. $\frac{5}{2}$ 3. $\frac{7}{3}$ 4. $\frac{4}{15}$ 5. $\frac{3}{2}$ 6. $\frac{22}{3}$ 7. $\frac{\pi}{16}a^4$ 8. $\frac{1}{2}\ln\frac{e+1}{3(e-1)}$ 9. $\frac{4}{5}$
10. $\ln 2 - \frac{1}{2}$ 11. $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}$ 12. $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\ln 2$ 13. $\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})$ 14. $2(1-e^{-1})$ 15. e
16. $1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ 17. $4 - 2\arctan 2$ 18. $3\ln 2 - 1$ 19. $\ln 2e - \ln(1+e)$ 20. $\frac{3}{8}$
21. $\frac{1}{3} + e^{-1} - e^{-\frac{3}{2}}$ 22. $2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$

四、应用题.

1. 56π 2. $\frac{1}{6}$ 3. $b-a$ 4. $\frac{\pi}{5}$

五、极小值 $f(0)=0$ 拐点 $(1, 1-2e^{-1})$

六、证明题. (提示: 利用变上限积分的可导性)

第6章 多元函数微积分

习题 A

一、选择题.

1. C 2. B 3. B 4. D 5. C 6. C 7. B 8. D 9. A 10. D 11. C 12. D
13. D 14. D 15. A 16. A 17. B 18. A 19. A.

二、填空题.

1. $\frac{1}{1+x^2}$ 2. 9π 3. 0 4. $\{(x, y) | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 2, -1 \leq y \leq 1\}$ 5. $\frac{3}{4}$ 6. xe^{xy}
7. $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 8. $\{(x, y) | 2x + 3y > 0 \text{ 且 } 5x^2 + 6y^2 \leq 1\}$ 9. yx^{y-1} .
10. $\sin y dx + x \cos y dy$

三、计算题.

1. $\left(y + \frac{1}{y}\right)dx + x\left(1 - \frac{1}{y^2}\right)dy$ 2. $\frac{u-v}{u^2+v^2}$ 3. $\frac{13}{12}$ 4. -2 5. $\frac{9}{4}$ 6. $-2y + \sin(x-y)$.
7. $\frac{\pi}{4}$ 8. $\Delta x + 2(\Delta y)$ 9. (略) 10. (略)

习题 B

一、选择题.

1. D 2. C 3. D 4. D 5. C 6. A 7. D 8. B 9. B 10. D 11. A 12. A
13. D 14. C 15. B 16. A 17. B 18. D

二、填空题.

1. $e^{\sin x - 2e^x}(\cos x - 2e^x)$ 2. $dx + \frac{1}{2}dy$ 3. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y)dy$ 4. $2xy^2 + 2x^2y + 3$.
5. $\int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x, y)dy$ 6. $\frac{x \cdot \ln 2}{\sqrt{x^2 + y^2}} 2^{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 7. $\{(x, y) | y > -x\}$ 8. $x^2 \sin 2y$.
9. $-2\cot(x-2y)$ 10. $\frac{2y}{\sin 2xy}dx + \frac{2x}{\sin 2xy}dy$

三、计算题.

1. $(\cos t - \sin t)e^t + \cos t$ 2. 8 3. $\frac{5}{12}$ 4. $\int_{-6}^{-2} dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{3-x} f(x, y)dy$ 5. $\frac{a^4}{12}$ 6. $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$
7. 单调减区间: $(0, 2)$, 单调增区间: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, 极大值: $f(0)=1$, 极小值:
 $f(2)=-5$. 凹区间: $(1, +\infty)$, 凸区间: $(-\infty, 1)$, 拐点: $(1, 3)$ 8. 略 9. $-\frac{\pi^2}{4}$
10. $\cos 1$ 11. $2x \cos x + \sin x$ 12. -8 13. (提示: 第二换元法, 令 $t = a - x$)

第 7 章 常微分方程

习题 A

一、选择题.

1. D 2. C 3. C 4. B 5. C 6. C 7. B 8. B 9. A 10. C 11. B 12. A
13. C 14. C 15. B 16. A 17. A 18. C 19. B

二、填空题.

1. 3 2. $\sin \frac{y}{x} = cx$ 3. $C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x - \sin 2x$ 4. $y' - \frac{y}{x} = x$ 5. $x^2(a + bx)e^{3x}$
6. $y = y_1(x) + C[y_2(x) - y_1(x)]$ 7. $e^{\frac{1}{2}x}(C_1 \cos \sqrt{7}x + C_2 \sin \sqrt{7}x)$ 8. $C_1 e^x + C_2 e^{6x}$
9. $C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$ 10. 0, 1 11. $y' + 2y = 2x$ 12. $y = 2e^x - 1$ 13. $y' = -\frac{x}{y}$
14. $x\left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{16}x - \frac{7}{32}\right)$ 15. $\cos x + \sin x$

三、计算题.

1. $e^x + e^{-y} = C$ 2. $x + 2ye^{\frac{x}{y}} = C$ 3. $y = e^{-x}(x + C)$ 4. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$
5. $e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{4}xe^x \cos 2x$ 6. $y = e^{4x}\left(x + \frac{1}{2}x^2\right)$ 7. $(1-x)(1+y) = C$

$$8. \sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\arctan \frac{y}{x}} \quad 9. y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x \quad 10. y = -5e^x + \frac{7}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}.$$

$$11. y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{3}x + 1 \right) e^{3x}.$$

四、应用题.

$$1. y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x + 1. \quad 2. y = 2(e^x - x - 1). \quad 3. e^y = \frac{1}{2}(e^{2x} + 1).$$

$$4. y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}). \quad 5. y = e^x - e^{-x} + e^x(x^2 - x).$$

习题 B

一、选择题.

1. B 2. C 3. B 4. B 5. A 6. C 7. B 8. B 9. A 10. C 11. A 12. A
13. B 14. A 15. D 16. D 17. B 18. D 19. C 20. A

二、填空题.

1. $xy' - 2y = 0$ 2. $y = C_1 + C_2 e^{-x}$ 3. 1 4. $\tan \frac{y}{x} = \ln Cx$ 5. $C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x$.
6. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ 7. $(C_1 + C_2 x)e^{-2x}$ 8. $y'' - 2y' + 5y = 0$ 9. 3 10. $y' - y = 0$
11. $y = Cx^4$ 12. 3 13. $\ln|y| - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = C$ 14. 4 15. $y = Cx + x^2$.

三、求下列微分方程的通解或特解.

1. $(x - y) \ln Cx = x$ 2. $y = Cx^2 - 2x$ 3. $x = Ce^y - (y + 1)^2$ 4. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + e^{-x}$
5. $y = \cos^2(x + C_1) + C_2$ 6. $y = e^{-x} - e^{4x}$ 7. $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C \right]$
8. $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ 9. $y = 2xe^{3x}$ 10. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} + \frac{11}{8} + \frac{1}{2}x$

四、计算题.

1. $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 2. (略) 3. $y'' - 3y' + 2y = 0$ 4. $-1 + 2e^x$

第 8 章 级 数

习题 A

一、选择题.

1. D 2. B 3. C 4. A 5. C 6. D 7. D 8. D 9. C 10. B 11. D 12. C
13. D 14. D 15. D 16. C 17. A 18. C 19. D 20. D

二、填空题.

1. 必要, 充分 2. 1 3. $\sqrt{3}, (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 4. 4 5. 3 6. $a > 1$ 7. $\ln(1+x)$ 8. $\frac{x}{3(1-x)}$.

9. 0 10. 3, $(-3, 3)$ 11. $-\ln(1-x)$ $-1 \leq x < 1$ 12. $\frac{1}{(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, -1 < x < 1.$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, -1 < x \leq 1$ 14. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}, -\infty < x < +\infty$

15. $s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1, s(\pi) = 1, s\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1, s(3\pi) = 1.$

三、判断下列级数的敛散性.

1. 发散 2. 收敛 3. 收敛 4. 发散 5. 收敛

四、判别下列级数是绝对收敛还是条件收敛或发散.

1. 绝对收敛 2. 条件收敛 3. 发散 4. 绝对收敛

五、计算题.

1. $R=1, (-1, 1], s(x) = -\ln(1+x), -\ln 2$ 2. $R=1, (-1, 1), s(x) = \frac{1}{(1-x)^3}, 8.$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{16^{n+1}}, -4 < x < 4.$ 4. $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n + 1}{n} x^n, -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$

六、应用题.

$$f(x) = \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{n^2 + 1} \cos nx + \frac{n(-1)^{n+1} e^{\pi} + 1}{n^2 + 1} \sin nx \right] \quad -\infty < x < +\infty, \quad \text{且 } x \neq n\pi,$$

$n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

习题 B

一、选择题.

1. A 2. C 3. C 4. B 5. B 6. A 7. C 8. D 9. B 10. B 11. A 12. A
13. C 14. B 15. C 16. A 17. B 18. B 19. B 20. A

二、填空题.

1. 收敛, 发散 2. 1, $(-1, 1]$ 3. 3, $[-3, 3)$ 4. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1 \leq x \leq 1.$

5. $u_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}, S_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right), S = \frac{1}{3}$ 6. \sqrt{R} 7. $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}, S = 1.$

8. $S_n = a_1 - a_{n+1}, S = a_1 - a_0$ 9. $2e; 2e; 2, -1, 0, \frac{1}{e}; 1$ 10. $(1, 2].$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, -\infty < x < +\infty$ 12. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, -1 < x < 1$ 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, -\infty < x < +\infty$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n, -1 < x < 1.$

15. $a_n = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n (\pi + 1)], b_1 = 0, b_n = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1], a_0 = \pi + 2,$

三、判断下列级数的敛散性.

1. 收敛 2. 收敛 3. 发散 4. 发散

四、判别下列级数是绝对收敛还是条件收敛或发散.

1. 绝对收敛 2. 绝对收敛 3. 条件收敛 4. 绝对收敛
5. $p \leq 0$, 发散; $0 < p \leq 1$, 条件收敛; $p > 1$, 绝对收敛

五、求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

1. $R = \frac{1}{3}, \dots \left[-\frac{1}{3}, \dots \frac{1}{3}\right]$ 2. $R = 2, [-2, \dots 2]$ 3. $R = 1, (-2, 0]$.

六、求下列幂级数的和函数, 并指出其收敛区间.

1. $S(x) = \arctan x, x \in [-1, 1]$. 2. $S(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, x \in (-1, 1), \frac{12}{25}$

七、求下列函数展成 x 的幂级数.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n, -3 < x < 3$ 2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} [1 + (-1)^n 2^{n+1}] x^{n+1}, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

八、计算题.

1. $f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1-4n^2}, x \in (-\infty, +\infty)$
2. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!}, -\infty < x < +\infty$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)! 2^{2n-1}}, -\infty < x < +\infty$
3) $\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n + 2^{n+1}] x^n, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

九、应用题. (略)

第九章 行列式矩阵与线性方程组

习题 A

一、选择题.

1. A 2. C 3. D 4. B 5. A 6. C 7. B 8. D 9. A 10. B 11. A 12. A

二、填空题.

1. $k \neq -1, 3$ 2. $\pm\sqrt{3}$ 3. -6 4. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & -4 & 12 \\ 12 & -6 & 18 \end{pmatrix}$ 5. 24 6. 4 7. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

8. 16 9. $\frac{11}{3}$ 10. 1

三、计算题.

1. -4 2. $\lambda = 1, \xi = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数

$$3. a=3, \quad \xi = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数} \quad 4. 5 \quad 5. 96$$

$$6. \text{ 基础解系: } \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 通解: } \xi = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2, \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数}$$

$$7. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad 8. \xi = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数}$$

习题 B

一、选择题.

1. C 2. B 3. B 4. B 5. A 6. D 7. A 8. C 9. A 10. C 11. D

二、填空题.

$$1. 0 \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix} \quad 3. n-2 \quad 4. -n \quad 5. 4 \quad 6. 1 \quad 7. 14 \quad 8. 12 \quad 9. 2 \quad 10. 1$$

三、计算题.

$$1. k=1 \quad 2. X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3. k=1, m=-1, \quad \xi = k \begin{pmatrix} -\frac{10}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数}$$

$$4. A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 11 & -5 & 1 \\ 19 & -9 & 2 \end{pmatrix} \quad 5. a=2, \quad \xi = k \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数}$$

$$6. B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

四、证明题. (略)

第十章 概率统计初步

习题 A

一、选择题.

1. A 2. B 3. C 4. A 5. C 6. D 7. D 8. B 9. B 10. A 11. A 12. B
13. D

二、填空题.

1. 0.75 2. $\frac{64}{729}$ 3. $\frac{1}{9}$ 4. 0.6 5. 0.1 6. 3 7. 0.2 8. $\frac{5}{54}$ 9. $\frac{7}{20}$ 10. $\frac{1}{8}, 0.0228$
11. $k=2$ 12. 0.44 13. $\frac{1}{7}$ 14. $1-4e^{-3}$, $\frac{3}{4}$ 15. $\frac{m}{m+n}$ 16. $\frac{2}{3}$ 17. 0.2

三、计算题.

1. (1) 0.994 (2) 0.398 2. (1) $A=0.5$, (2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 3. (1) $\frac{1}{3}$, (2) $\frac{3}{4}$.
4. (提示: 利用条件概率公式展开已知等式) 5. (1) 0.064 (2) 0.375 6. (1) $\frac{5}{12}$,
(2) $\frac{1}{12}$

习题 B

一、选择题.

1. C 2. B 3. D 4. A 5. B 6. C 7. B 8. D 9. A 10. C 11. A 12. D

二、填空题.

1. 0.2 2. 0.5 3. $\frac{1}{3}$ 4. $\frac{1}{5}$ 5. $\frac{1}{6}$ 6. 0.0012 7. $\frac{1}{4}$ 8. 1, 0.2 9. $\frac{3}{8}$
10. $\frac{2}{7}$ 11. $\frac{5}{14}$ 12. 0.0729, 0.40951 13. 0.4, 0.64, 0.14 14. $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad 15. \frac{5}{12} \quad 16. \frac{16}{45} \quad 17. \frac{1}{2}(1+\ln 2)$$

三、计算题.

1. (1) $\frac{1}{\pi}$ (2) $\frac{2}{3}$ 2. (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{11}{18}$ 3. (1) $a=-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{4}$ 4. (1) 1
(2) 独立 5. $p(p^2-3p+3)$ 6. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $1-e^{-1}$